Journal of Education and Science
Vol. 28, No.3, 2019, pp.248-257
ISSN 1812-125X
http://edusj.mosuljournals.com

Exisfence And Uniqueness Of Solufion For Fractional Integro Differential Equation With Boandary Conditions

N. A. Abdul – Kader **N. L. Housen** **N. A. Abdul-Razaq**
Department of Mathematics / College of Education for pure Science
University of Mosul / Mosul - Iraq.
mahmod.amir74@gmail.com Intropy77@yahoo.com adnan.razzaq@gmail.com

DOI: 10.33899/edusj.2019.162968

Received 03 / 01 / 2019 **Accepted** 27 / 01 / 2019

ABSTRACT
Our work investigates the Existence and Uniqueness of the solution of nonlinear fractional integro-differential equation with boundary Conditions by applying fixed point theorems.

Keywords: Fractional integro-differential equation, Existence and Uniqueness solutions, Baundary conditions.

وجود ووحدانية الحل لمعادلة تكاملية- تفاضلية من الرتبة الكسرية ذات شروط حدودية

نوال عزيز عبد القادر نورا ليث حسين نادية عدنان عبد الرزاق
قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة
جامعة الموصل/ موصل – العراق
adnan.razzaq@gmail.com Intropy77@yahoo.com mahmod.amir74@gmail.com

DOI: 10.33899/edusj.2019.162968

الاستلام	القبول
2019 / 01 / 03	2019 / 01 / 27

الملخص

خلال هذا البحث قدمنا بعض المبرهنات المتعلقة بوجود ووحدانية الحل لمعادلة تكاملية تفاضلية من الرتبة الكسرية ذات شروط حدودية بالاعتماد على مبرهنات النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية: معادلة تكاملية–تفاضلية كسرية، وجود ووحدانية الحل، شروط حدودية.

1- المقدمة

في الآونة الاخيرة، تعد المعادلات التفاضلية الكسرية ذات أهمية كبيرة لعلماء الرياضيات، اذ كانت السبب في تطوير نظرية حسبان التفاضل والتكامل الكسري، فضلاً عن تطبيقات الانكماش في مختلف العلوم والهندسة مثل: الهندسة, الهندسة الميكانيكية، والكيمياء، والفيزياء... الخ. ومن الجدير بالذكر أن معظم البحوث والكتب في حسبان التفاضل الكسري تم تكريسها لإمكانية حل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بالنسبة للدوال الخاصة.

نُشر مؤخراً بعض الابحاث التي تتناول وجود وتعدد الحلول (أو الحل الموجب) للمعادلة التفاضلية الكسرية اللاخطية ذات شروط ابتدائية باستعمال تقنيات التحليل اللاخطي. اذ درس الباحث Bai و Lii[1] وجود وتعدد الحلول الموجبة لمسائل القيمة الحدودية للمعادلة التفاضلية الكسرية اللاخطية, وفي السنوات الاخيرة ازدادت أهمية دراسة المعادلات التكاملية–التفاضلية الكسرية، لمزيد من التفاصيل انظر [4، 6، 7]. في هذا البحث تم اعتماد المعادلة التكاملية–التفاضلية التالية:

$$ {}^{c}D^{q}\phi(t)=\psi\left(t,\phi(t),\int_{0}^{t}k(t,y,\phi(y))dy,\int_{0}^{T}g(t,y,\phi(y))dy\right) \tag{1.1}$$

ذات الشروط الحدودية

$$\phi(0)=\delta\neq 0 \quad , \quad \phi'(T)=\gamma\neq 0 \tag{1.2}$$

حيث أن: $1 < \alpha \le 2$ ، $^{C}D^{\alpha}$ هو الاشتقاق الكسري القياسي لكابوتو Caputo ، و δ , γ ثوابت، و$t \in$ $J = [0, T]$ ، و الدالة ψ اللاخطية معرفة بـ :

$$\psi : [0 , T] \times \bar{X} \times \bar{X} \times \bar{X} \to \bar{X}$$

و

$$k , g : J \times J \times \bar{X} \to \bar{X}$$

حيث أن $\bar{X}$ هو فضاء باناخ Banach مزود بمعيار $\|.\|$.

لتكن

$$C = C([0 , T], \overline{X})$$

فضاء باناخ لكل الدوال المستمرة

$$P : [0 , T] \longrightarrow \bar{X}$$

مع المعيار الاعظم $\|P\| = \sup\{\|P(y)\| ; y \in [0, T]\}$.

يهدف هذا البحث الى دراسة وجود الحل لمسألة القيمة الحدودية (1.2)-(1.1) لمعادلة تكاملية-تفاضلية كسرية في فضاء باناخ Banach وباستعمال مبرهنة باناخ ومبرهنة krasnoel'skii.

2- تعريفات

في هذا البند سنقدم بعضا من التعريفات والمأخوذات والمبرهنات التي نحتاجها في عملنا هذا.

- تعريف (2.1) [2،5]

اذا كانت $f \in L[a,b]$ و $\alpha > 0$ يعرف التكامل من الرتبة α بالشكل

$$ {}^{b}_{a}\mathrm{I}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{b} (b-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

وبشرط وجود التكامل اعلاه.

- تعريف (2.2) [2]

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة [a , b]، فأن الاشتقاق الكسري لكابوتو Caputo يعرف بالصيغة التالية:

$$({}^{c}D_{0}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

حيث أن $n = [\alpha] + 1$ و [ ] يمثل الجزء الصحيح لـ α .

مأخوذة 2.1: [3]

لتكن $\alpha > 0$ فان:

$${}^{t}D_{a}^{-\alpha}\ {}^{t}D_{a}^{\alpha}\, x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots c_{n-1} t^{n-1}.$$

لبعض $c_i \in R$ حيث ان $i = 0,1,2 \ldots, n-1$ و $n = [\alpha] + 1$ و $[\alpha]$ تمثل الجزء الصحيح لـα .

مبرهنة 2.1: (Krasnosel'skii fixed point theorem)

لتكن M مجموعة جزئية غير خالية من فضاء باناخ $\bar{X}$ وتكون مغلقة-محدبة ومقيدة.

وليكن R وS مؤثرين بحيث أن:

1- $Rx+Sy\in M$، لكل $x,y\in M$.

2- R متراص ومستمر.

3- S تطبيق انكماشي.

فيوجد $z\in M$ بحيث ان $z = Rz+Sz$.

ليكن $\bar{X}$ فضاء باناخ مع النظيم $\|\cdot\|$، وليكن $C([0,T],\bar{X})$ فضاء باناخ لجميع الدوال المستمرة. والدالة $P : [0,T] \longrightarrow \bar{X}$ مع المعيار الاعظم.

افرض المعادلة التكاملية-التفاضلية الكسرية ذات الشروط الحدودية التي لها الصيغة التالية:

$$ {}^{c}D^{q}\phi(t)=\psi\left(t,\phi(t),\int_{0}^{t}k(t,y,\phi(y))dy,\int_{0}^{T}g(t,y,\phi(y))dy \right) $$

$$ \phi(0)=\delta\neq 0 \quad , \phi'(T)=\gamma\neq 0. $$

حيث أن $1<q\leq 2$ و ${}^{c}D^{q}$ هو مشتقة كابوتو Caputo من الرتبة q، والدالة غير الخطية $\psi : [0,T]\times\bar{X}\times\bar{X}\times\bar{X}\longrightarrow\bar{X}$ و $k\,,g: [0,T]\times[0,T]\times\bar{X}\longrightarrow\bar{X}$ تحقق الفرضيات التالية:

أ- يوجد دوال مستمرة $h: [0\,,T]\longrightarrow[0,\infty)$ و $h_1: [0,T]\longrightarrow[0,\infty)$، بحيث أن:

$$ \left\|\int_{0}^{t}(k(t,r,x)-k(t,r,y))dr\right\|\leq h(t)\|x-y\| $$

و

$$ \left\|\int_{0}^{t}k(t,r,y)\,dr\right\|\leq h_1(t)\|\,y\,\| $$

لكل $t,r\in[0,T]$ و $x,y\in\overline{X}$.

ب- وجود دوال مستمرة $u: [0,T]\longrightarrow R^{+}$ و $u_1: [0,T]\longrightarrow R^{+}$ بحيث أن:

$$ \left\|\int_{0}^{T}(g(t,r,x)-g(t,r,y))\,dr\right\|\leq u(t)\|x-y\| $$

و

$$ \left\|\int_{0}^{T}g(t,r,y)\,dr\right\|\leq u_1(t)\|\,y\,\| $$

لكل $t,r\in[0,T]$ و $x,y\in\overline{X}$.

ج- يوجد دوال مستمرة $m: [0,T]\longrightarrow R^{+}$ و $Q: R^{+}\to(0,\infty)$ وعدد موجب N^{*} بحيث أن:

$$ \|\psi(t,x_1,y_1,z_1)-\psi(t,x_2,y_2,z_2)\|\leq m(t)Q\left(\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|+\|z_1-z_2\|\right). $$

و

$$ \mathrm{N}^{*}=\sup_{t\in[0,T]}\|\psi(t,0,0,0)\| $$

لكل $t\in[0,T]$ و $x_1,y_1,z_1\,,x_2\,,y_2,z_2\in\bar{X}$، حيث ان Q هي دالة مستمرة وغير متزايدة تحقق الشرط $Q\,(\mu(t)x)\leq Q(x)\mu(t)$، عندما تكون $\mu : [0,T]\longrightarrow R^{+}=[0,\infty)$. دالة مستمرة.

مأخوذة 2.2:

ليكن $1 < q \leq 2$ و $\Psi : J \times \bar{X} \longrightarrow \bar{X}$ هي دالة مستمرة، حيث ان $J = [0, T]$، فان المعادلة التفاضلية الكسرية (1.1) ذات الشروط الحدودية (1.2) تكافئ المعادلة التكاملية

$$\phi(t) = \delta + \gamma\, t + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\psi\Big(\ y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\ \Big)dy$$
$$-\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\psi\Big(\ y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\ \Big)dy \tag{2.1}$$

البرهان: من المأخوذة (2.1)، بالإمكان تحويل المسألة (1.2)−(1.1) لتكافئ المعادلة التكاملية التالية:

$$\phi(t) = {}^{t}_{0}\mathrm{I}^{q}\,\psi + c_1 + c_2 t. \tag{2.2}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\psi\left(\ y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\right)dy + c_1 + c_2 t.$$

وفي ضوء العلاقة

$${}^{t}D^{q}\, I^{q}\ \phi(y) = \phi(y)\ , I^{q} I^{\beta}\,\phi(t) = I^{q+\beta}\,\phi(t).$$

لكل $\beta > 0$, ، فنحصل على:

$$\phi'(t) = \frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^t (t-y)^{q-2}\psi\Big(\ y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\ \Big)dy + c_2 t \tag{2.3}$$

وبتطبيق الشرط الحدودي (1.2)، نحصل على:

$$\phi(0) = c_1 = \delta$$

$$\phi'(T) = \overset{T}{\mathrm{I}}{}^{q-1}\psi + c_2 = \gamma$$

لذا، فان :

$$c_2 = \gamma - \frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\psi\Big(\ y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\ \Big)dy$$

وبالتالي يكون حل المعادلتين (1.2) −(1.1) هو ايضا حل للمعادلة التكاملية :

$$\phi(t) = \delta + \gamma\, t + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\psi\Big(\ y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\ \Big)dy$$
$$-\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\psi\Big(\ y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\ \Big)dy \tag{2.4}$$

وهو المطلوب.

3- المبرهنات الاساسية للبحث

مبرهنة (3.1):

في حالة تحقق الفرضيات (أ) − (ج) ،ولتكن $L_1(t) = m(y)(1 + h(t) + u(t))$ وان $L_1^{*} = \sup\{L_1(t) : t \in [0,T]\}$ واذا وجد عدد موجب n بحيث $Q(\|x-y\|) < n\,\|x-z\|, (n > 0)$ وكان $nL_1^{*}T^{q}\left(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q-1)}\right) < 1$ فان المعادلتين التكامليتين−التفاضليتين الكسريتين (1.2) − (1.1) تمتلك حلاً وحيدا على الفترة المغلقة $J = [0, T]$.

البرهان:

نعرف الدالة $N: C \longrightarrow C$ على النحو التالي:

$$N\phi(t)=\delta+\gamma\, t+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\psi\Big(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \Big)dy$$

$$-\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\psi\Big(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \Big)dy \qquad (3.1)$$

بالإمكان اثبات ان الدالة N تمتلك نقطة ثابتة على المجموعة

$$E_r=\{\phi\in C,\|\phi\|\le r\}$$

وهذه النقطة الثابتة تمثل الحل للمعادلتين (1.2) − (1.1)، وعليه

$$\|N\phi(t)\|\le|\delta|+|\gamma|t+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\Big\| \psi\Big(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \Big)\Big\|dy$$

$$+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\Big\| \psi\Big(y,\phi(y),\int_0^s k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma) \Big)\Big\|dy.$$

$$\le|\delta|+|\gamma|t+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\Big\| \psi\Big(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \Big)$$

$$-\psi(y,0,0,0)+\psi(y,0,0,0)\Big\|dy$$

$$+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_a^T (T-y)^{q-2}\Big\| \psi\Big(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \Big)$$

$$-\psi(y,0,0,0)+\psi(y,0,0,0)\Big\|dy.$$

$$\le|\delta|+|\gamma|t+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\Big\| \psi\left(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \right)$$

$$+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\Big\| \psi\Big(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \Big)$$

$$-\psi(y,0,0,0)\Big\|dy+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_a^T (T-y)^{q-2}\big\| \psi(y,0,0,0)\big\|dy.$$

$$\le|\delta|+|\gamma|t+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}m(y)Q\Big(\| \phi(y)\|+\Big\|\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\Big\|$$

$$+\Big\|\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\Big\|\Big)dy+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}m(y)Q\Big(\| \phi(y)\|$$

$$+\Big\|\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma\Big\|+\Big\|\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))dt\Big\|\Big)dy$$

$$+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\|\psi(y,0,0,0)\|dy+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\|\psi(y,0,0,0)\|dy.$$

$$\| N\phi(t) \| \le |\delta| + |\gamma| t + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} m(y) Q\left(\|\phi\| + h_1(y)\|\phi\| + u_1(y)\|\phi\| \right) dy$$
$$+ \frac{T}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} m(y) Q\left(\|\phi\| + h_1(y)\phi + u_1(y)\|\phi\| \right) dy$$
$$+ \frac{N^*}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} dy + \frac{TN^*}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} dy.$$

$$\|N\phi(t)\| \le |\delta| + |\gamma| T + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} m(y) \left(1 + h_1(y) + u_1(y) \right) Q(\|\phi\|) dy$$
$$+ \frac{T}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} m(y) \left(1 + h_1(y) + u_1(y) \right) Q\|\phi\| \, dy \qquad (3.2)$$
$$+ \frac{N^*}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} dy + \frac{TN^*}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} dy.$$

نضع $\{H=\sup\{m(t)(1 + h_1(t) + u_1(t); t \in [0,T]\}$ ، فاننا نحصل على:

$$\|N\phi(t)\| \le |\delta| + |\gamma| T + \frac{H}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} Q(\|\phi\|) \, dy + \frac{TH}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} Q(\|\phi\|) \, dy$$
$$+ \frac{N^*}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} \, dy + \frac{N^* T}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} dy$$
$$\le |\delta| + |\gamma| T + \frac{HQ(r)}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} \, dy + \frac{N^*}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} \, dy + \frac{N^* T}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} dy$$
$$+ \frac{THQ(r)}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} dy.$$

$$\le |\delta| + |\gamma| T + \frac{T^q H \, Q(r)}{\Gamma(q+1)} + \frac{N^* T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{HQ(r) T^q}{\Gamma(q)} + \frac{N^* T^q}{\Gamma(q)}.$$
$$\le |\delta| + |\gamma| T + T^q H \, Q(r) \left(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right) + N^* T^q \left(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right) \qquad (3.3)$$
$$= |\delta| + |\gamma| T + (H \, Q(r) + N^*) T^q \left(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right) = l.$$

لذا $N(E_r)$ مقيدة.

بعد ذلك، نستعمل مبدأ انكماش باناخ لإثبات أن N هو انكماش.

ليكن $x, z \in C$ ولكل $t \in [0,T]$، فنحصل على:

$$\|Nx(t)-Nz(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\| \psi\Big(y,x(y),\int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \Big)$$

$$-\psi\Big(y,z(y),\int_0^y k(y,\sigma,z(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,z(\sigma))d\sigma \Big) \|dy$$

$$+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\| \psi\Big(y,x(y),\int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \Big)$$

$$-\psi\Big(y,z(y),\int_0^y k(y,\sigma,z(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,z(\sigma))d\sigma \Big) \|dy.$$

وباستعمال الفرضيات(أ)- (ج)، نحصل على:

$$\|Nx(t)-Nz(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1} m(y) Q\Big(\|x(y)-z(y)\| + \Big\| \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma - \int_0^y k(y,\sigma,y(\sigma))d\sigma \Big\|$$

$$+\Big\| \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma - \int_0^T g(y,\sigma,z(\sigma))d\sigma \Big\|\Big)dy + \frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2} m(y) Q\Big(\|x(y)-z(y)\|$$

$$+\Big\| \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma - \int_0^y k(y,\sigma,z(\sigma))d\sigma \Big\| + \Big\| \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma - \int_0^T g(y,\sigma,z(\sigma))d\sigma \Big\|\Big)dy.$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1} m(y) Q\big(\|x-z\| + h(y)\|x-z\| + u(y)\|x-z\|\big)dy$$

$$+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2} m(y) Q\big(\|x-z\| + h(y)\|x-z\| + u(y)\|x-z\|\big)dy.$$

$$\|Nx(t)-Nz(t)\| \le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1} m(y)(1+h(y)+u(y))Q(\|x-z\|)dy$$

$$+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2} m(y)(1+h(y)+u(y))Q(\|x-z\|)dy.$$

$$\|Nx(t)-Nz(t)\| \le \frac{L_1^* n}{\Gamma(q)}\|x-z\|\int_0^t (t-y)^{q-1}dy + \frac{TL_1^* n}{\Gamma(q-1)}\|x-z\|\int_0^T (T-y)^{q-2}dy \qquad (3.4)$$

$$= \frac{T^q L_1^* n}{\Gamma(q+1)}\|x-y\| + \frac{T^q L_1^* n}{\Gamma(q)}\|x-y\|.$$

$$= T^q L_1^* q\Big(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\Big)\|x-y\|.$$

مما سبق، وباتباع مبدأ الانكماش الاساسي، نستنتج ان N هو تطبيق انكماشي، وحسب مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة فيوجد نقطة وحيدة للتطبيق N تمثل حل لمسالة القيم الحدودية (1.2)–(1.1).

مبرهنة (3.2):

لتكن الفرضيات (أ)–(ج) متحققة وليكن $Q(\|x_1-x_2\|) \le n\|x_1-x_2\|$ و $\frac{T^q n L_1^*}{\Gamma(q)} < 1$ وان:

$$\| \psi\left(y,\phi(y),\int_0^y k(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,\phi(\sigma))d\sigma \right) \| \le \omega(t).$$

حيث ان

$$\omega(t) \in L(J) \tag{3.5}$$

فان مسألة القيم الحدودية $(1.2)-(1.1)$ تمتلك على الاقل حلاً واحداً على الفترة $[0,T]$.

البرهان:

تامل $E_r = \left\{\phi \in C: \|\phi\| \le r\right\}$، نعرف المؤثرين R و S كالتالي:

$$(Rx)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\psi\left(y,x(y),\int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \right)dy.$$

$$(Sx)(t) = \frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\psi\left(y,x(y),\int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma) \right)dy + \gamma t + \delta.$$

من الملاحظ انه اذا كانت $x_1, x_2 \in E_r$ فان $Rx_1, Sx_2 \in E_r$.

$$\begin{aligned}\|Rx_1 + Sx_2\| = \| &\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\psi\left(y,x_1(y),\int_0^y k(y\sigma,x_1(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x_1(\sigma))d\sigma \right)dy \\ &+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\psi\left(y,x_2(y),\int_0^y k(y,\sigma,x_2(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x_2(\sigma))d\sigma) \right)dy \;\| + |\gamma| t.\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}\| \psi\left(y,x_1(y),\int_0^y k(y,\sigma,x_1(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x_1(\sigma))d\sigma) \right) \|dy$$

$$+\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\| \psi\left(y,x_2(y),\int_0^y k(y,\sigma,x_2(\sigma))d\sigma,\int_0^T g(y,\sigma,x_2(\sigma))d\sigma) \right) \|dy + |\gamma| t.$$

(3.6)

$$\le \frac{\|\phi\|_L}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-y)^{q-1}dy + \frac{T\|\phi\|_L}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (t-y)^{q-2}dy + |\gamma| T.$$

$$\le \frac{\|\phi\|_L T^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{T^q \|\phi\|_L}{\Gamma(q)}.$$

$$\le (\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)})T^q \|\phi\|_L.$$

الان، سنبرهن على ان Sx هو انكماش

$$\begin{aligned}\|Sx_1 - Sx_2\| \le \frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2}\| &\psi\left(y,x_1(y),\int_0^y k(y,\tau,x_1(\tau))d\tau,\int_0^T g(y,\tau,x_1(\tau))d\tau \right) \\ &-\psi\left(y,x_2(y),\int_0^y k(y,\tau,x_2(\tau))d\tau,\int_0^T g(y,\tau,x_2(\tau))d\tau) \right) \|dy.\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\le \frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^T (T-y)^{q-2} m(y)(1+h(y)+u(y))\phi(\|x_1 - x_2\|)dy$$

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \le \frac{t}{\Gamma(q-1)} \int_0^T (T-y)^{q-2} L_1^* n \|x_1 - x_2\| dy.$$

$$\le \frac{nL_1^*}{\Gamma(q)} T^q \|x_1 - x_2\|.$$

من الواضح ان S هو تطبيق انكماش، وبما انه $x(t)$ مستمرة، فان Rx دالة مستمرة.

$$\|Rx(t)\| = \| \frac{t}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-y)^{q-1} f\left(y, x(y), \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma, \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \right) dy \|.$$

$$\le \|\phi\|_L \int_0^t \frac{(t-y)^{q-1}}{\Gamma(q)} dy. \tag{3.8}$$

$$\|Rx(t)\| = \frac{T^q \|\phi\|_L}{\Gamma(q+1)}$$

وبالتالي، فان R هي مقيدة بانتظام على E_r . الان سنبرهن أن Rx(t) متساوي الاستمرارية.

لتكن $t_1, t_2 \in [0,T]$ و $x \in E_r$ و $t_1 < t_2$.

وباعتبار ان ψ متراصة و مقيدة على المجموعة $J \times E_r$ فان:

$$\sup_{(t,y)\in J\times E_r} \| \psi\left(y, x(y), \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma, \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \right) \| = c < \infty.$$

فنحصل على:

$$\|R\,x(t_1) - R\,x(t_2)\| = \| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1-y)^{q-1} \psi\left(y, x(y), \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma, \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \right) dy$$

$$- \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2} (t_2-y)^{q-2} \psi\left(y, x(y), \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma, \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \right) dy \|.$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(q)} \| \int_0^{t_1} [\ (t_1-y)^{q-1} - (t_2-y)^{q-2}\ ] \psi\left(y, x(y), \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma, \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \right) dy$$

$$+ \| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-2} \psi\left(y, x(y), \int_0^y k(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma, \int_0^T g(y,\sigma,x(\sigma))d\sigma \right) dy \|.$$

$$\le \frac{c}{\Gamma(q+1)} \left[2(t_2 - t_1)^q + (t_1^q - t_2^q) \right]. \tag{3.9}$$

لذلك فان R متراص محليا، وباستعمال مبرهنة Arzela – Ascoli، فان R يعتبر متراصاً.

وبالتالي، فإننا نستخلص نتائج مبرهنة krasnosel'skii.

- المصادر

1) ZiBai H.LU., "positive Solutions for boundary Value Problems of nonlinear fractional differential equation", J, Mat. Anal . Appl. 311, 445-505, (2005).
2) Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo Juan J., "Theory and applications of fractional differential equations", North-Holland Mathematatils studies, 204. Elsevies Science B.V., Amsterdam, 2006.
3) Lakshmi kantham V., Leela S. and Vasundhara J., "Theary of Fractional Dynamic Systems", Cambridye. Academic Pablishers, Cambridge, 2009.
4) Momani S.M., "Local and global existence theorems on fractional integro-differential equations", Journal of Fractional Calculus, Vol, 18, pp.81-86, 2000.

5) Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, San Diego, 1999.
6) Momani S.M. and Hadid S.B., "on the inequalities of integro–differential fractional equations", Interenational Journal of Applied Mathematics, Vol.12, no.1, pp.29-37, 2003.
7) Momani S.M and El- khazali R., "On the existence of existence of extremal solutions of the fractional integro–elifferential equations", J.Fractional Calculus, Vol.18, 87-92, (2000).