متعددات حدود وينر لتعميم المسافة لبيانات مركبة من البيان التام مع بعض البيانات الخاصة

علي عزيز علي احمد محمد علي*

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

الاستلام 12/11/2006 القبول 04/04/2007

Abstract

It may be possible to find the Wiener polynomial with respect to a generalized distance of a compound graph constructed from two graphs having some kind of regularity. In this paper, we obtain the Wiener polynomials for a generalized distance of compound graphs constructed from a complete graph with some other special graph, such as a complete bipartite graph, a star, and a wheel, using binary operations defined by Gutman [4].

The Wiener index with respect to such generalized distance for each such compound graph is also obtained.

الملخص

إن وضع صيغة لمتعددة حدود وينر لتعميم المسافة في البيانات المركبة يتطلب ان تكون البيانات المركبة لها درجة من الانتظام, وهذا ينطبق على تراكيب بعض البيانات الخاصة التي لها انتظام معين, لذلك وجدنا من المناسب إيجاد حدوديات وينر لتعميم المسافة للبيان المركب من البيان التام مع بعض البيانات الخاصة مثلا البيان الثنائي التجزئة التام, وبيان النجمة, وبيان العجلة بإحدى العمليات الثنائية المعرفة لـ Gutman [4]. وكذلك أوجدنا دليل وينر لمتعددات الحدود لتعميم المسافة لكل من البيانات المركبة المذكورة سابقا.

(*) بحث مستل من رسالة الماجستير المنجزة من قبل الباحث الثاني بإشراف الباحث الأول في جامعة الموصل(2005) .

1.المقدمـة:

إن العالم Gutman [4] كان أول من وجد متعددة حدود وينر لبيانات مركبة نتجت مـن عمليتين معرفتين على البيانات هاتان العمليتان تتمثلان بالبيانين المركبين أدناه:

1. البيان المركب $G_1 \bullet G_2$ هو البيان الناتج من تطابق الرأسين u و v.
2. البيان المركب $G_1 : G_2$ هو البيان الناتج من إضافة حافة جديدة تصل الرأسين u وv.

إذ أن G_1 وG_2 بيانان متـصلين ومنفـصلين عـن بعـضهما بالنـسبة للـرؤوس، وأن $u \in V(G_1)$ و $v \in V(G_2)$.

وحديثا في عام 1996 قام كل من Sagan، و Yeh، Zhang بوصف متعـددات حـدود وينر لتركيب بيانين باستعمال عمليات ثنائية معروفة تماما في نظرية البيانات [5].

ونعرف متعددة حدود وينر لتعميم المسافة [3,2] (اختصارا، متعددة حدود وينر-n) لبيان متصل كالآتي

$$W_n(G;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(G,k)\, x^k$$

اذ أن $C_n(G,k)$ يمثل عدد الأزواج (v,S) والتي لكل منها المسافة الصغرى بـين أي رأس v من G والمجموعة S، $S \subseteq V(G)$, $(|S| = n-1)$ هـي k، أي أن $d_n(v,S) = k$.

وأن المسافة الصغرى بين الرأس v والمجموعة S، معرفة كما يأتي:

$$d_n(v,S) = \min\{d(v,u) : \ u \in S\}$$

وأن δ_n هو القطر-n والمعرف بـ

$$\delta_n = \max\{d(v,S) : v \in V, S \subseteq V, |S| = n-1\}$$

ويعرف دليل وينر-n للبيان G، والذي يرمز له بـ $W_n(G)$ بأنـه مجمـوع المـسافات الصغرى لكل الأزواج (v,S) في البيان G، أي أن

$$W_n(G) = \sum_{\substack{(v,S) \\ v \in V, S \subseteq V}} d_n(v,S)$$

إذ أن $|S| = n-1$.

وكذلك يمكن التعبير عن دليل وينر-n بأنه مشتقة متعددة حدود وينر-n بالنسبة إلـى x عندما $x = 1$، أي أن

$$W_n(G) = W_n'(G;x)\,\big|_{x=1} = \sum_{k=1}^{\delta_n} k\, C_n(G,k)$$

وأخيرا سوف نذكر بعض خواص معاملات متعددات حدود وينر-n للبيان متصل G.

لنفرض أن $S \subseteq V(G)$، وأن $|S| = n-1$، $2 \le n \le p$، فان

(1) عدد الأزواج (v,S) التي نستطيع أن نكونها هو $p\binom{p}{n-1}$، وأن مجموع المعاملات هو

$$\sum_{k=1}^{\delta_n} C_n(G,k) = (p-n+1)\binom{p}{n-1} = p\binom{p-1}{n-1}$$

(2) واضح أن

$$C_n(G,0) = p\binom{p-1}{n-2} \qquad .....(1.1)$$

(3) المأخوذة الآتية تعين لنا قيمة المعامل $C_n(G,1)$ لكل بيان متصل.

المأخوذة 1.1:[1] لكل بيان متصل G برتبة p ولكل $2 \le n \le p$، يكون

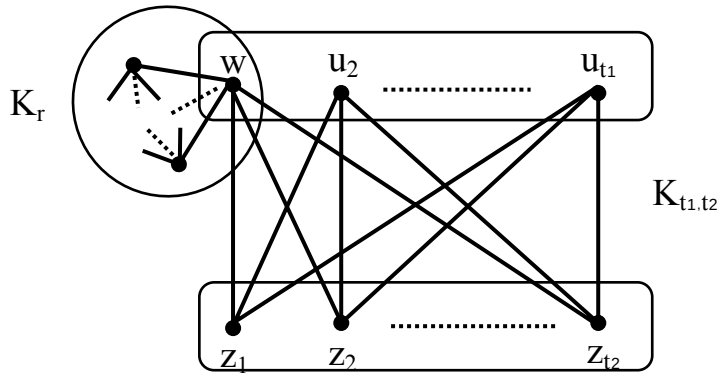
$$C_n(G,1) = p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{\forall v \in V} \binom{p-1-\deg_G v}{n-1}.$$

2. متعددة حدود وينر- n لبيان مركب من بيان تام مع بيان ثنائي **التجزئة تام:**

ليكن K_r بيان تام برتبة r، وأن K_{t_1,t_2} هو بيان ثنائي التجزئة تـام برتبـة $t_1 + t_2$، وأن مجموعة رؤوسه لها التجزئة الثنائية V_1 و V_2 إذ أن: $|V_1| = t_1$ و $|V_2| = t_2$.

وليكن v هو رأس في البيان K_r وأن u_1 هو رأس في البيان K_{t_1,t_2} .

ليكن $G = K_r \bullet K_{t_1,t_2}$ البيان الناتج من تطابق الرأس v من K_r مع الرأس u_1 من K_{t_1,t_2} ، كما مبين في الشكل(2.1).



الشكل (2.1) البيان $G = K_r \bullet K_{t_1,t_2}$

من الواضح أن رتبة G هي $p = r + t_1 + t_2 - 1$، وأن القطر- n للبيـان G لا يزيـد على3.

المبرهنة 2.1: لكل $3 \le n \le p$، تكون

$$W_n(G;x) = \sum_{k=0}^{3} C_n(G,k)x^k ;$$

إذ أن

$$C_n(G,0)=p\binom{p-1}{n-2};$$

$$C_n(G,1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-1)\binom{t_1+t_2-1}{n-1}+(t_1-1)\binom{r+t_1-2}{n-1}\right.$$
$$\left.+t_2\binom{r+t_2-2}{n-1}+\binom{t_1-1}{n-1}\right\};$$

$$C_n(G,2)=(r-1)\binom{t_1+t_2-1}{n-1}+(t_1-1)\left\{\binom{r+t_1-2}{n-1}-\binom{r-1}{n-1}\right\}$$
$$-(r-2)\binom{t_1-1}{n-1}+t_2\binom{r+t_2-2}{n-1};$$

$$C_n(G,3)=(t_1-1)\binom{r-1}{n-1}+(r-1)\binom{t_1-1}{n-1}.$$

البرهان: ليكن w الرأس في G الناتج من تطابق الرأسين u_1 و v. مـن العلاقـة (1.1) وباستخدام المأخوذة (1.1) يكون لدينا

$$C_n(G,0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

$$C_n(G,1)=p\binom{p-1}{n-1}-\sum_{y\in V(G)}\binom{p-1-\deg_G y}{n-1}$$

وبملاحظة أن

$$\deg_G y=\begin{cases} r-1 & ;\ \text{if } y\in V(K_r)-\{w\}\\ t_2 & ;\ \text{if } y\in V_1-\{w\}\\ t_1 & ;\ \text{if } y\in V_2\\ t_2+r-1 & ;\ \text{if } y=w\end{cases}$$

نحصل بالتعويض على $C_n(G,1)$ المذكورة في نص المبرهنة.

ولإيجاد $C_n(G, 3)$، نلاحظ أن $d_n(y,S) = 3$ في حالتين هما

1) $y\in V_1-\{w\}$; $\quad S\subseteq V(K_r)-\{w\}$

2) $y\in V(K_r)-\{w\}$; $\quad S\subseteq V_1-\{w\}$

وباحتساب عدد الأزواج (y,S) لكل من الحالتين أعلاه نحصل على

$$C_n(G,3)=(t_1-1)\binom{r-1}{n-1}+(r-1)\binom{t_1-1}{n-1}$$

ولما كان قطر-n للبيان G لا يزيد على 3 ، ومن العلاقة أدناه

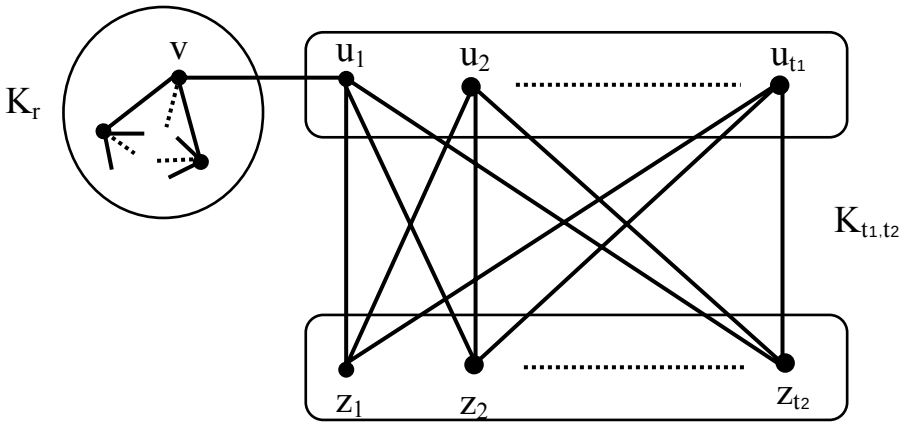
$$C_n(G,2)+C_n(G,3)=\sum_{y\in V(G)}\binom{p-1-\deg_G y}{n-1}$$

نحصل على $C_n(G,2)$ بعد التعويض ، كما هي معطاة في نص المبرهنة. #

النتيجة2.2: دليل وينر-n للبيان المركب $G=K_r\bullet K_{t_1,t_2}$ هو

$$W_n(G)=p\binom{p-1}{n-1}+(r-1)\binom{t_1+t_2-1}{n-1}+r\binom{t_1-1}{n-1}$$
$$+t_2\binom{r+t_2-2}{n-1}+(t_1-1)\left\{\binom{r+t_1-2}{n-1}+\binom{r-1}{n-1}\right\}.\ \#$$

ليكن $G'=K_r:K_{t_1,t_2}$ البيان الناتج من K_r و K_{t_1,t_2} وذلـك بإضافة حافة تصل الرأس v من K_r مع الرأس u_1 من K_{t_1,t_2} . كما مبين في الشكل(2.2).



الشكل (2.2) البيان $G'=K_r:K_{t_1,t_2}$

فمن الواضح أن رتبة G' هي $p=r+t_1+t_2$ وأن القطر-n له هو

$\delta_n=4$ عندما $n-1<\max\{r,t_1\}$

وأن $1\le\delta_n\le 3$ فيما عدا ذلـك.

المبرهنة2.3: لكل $3\le n\le p$ ، فان

$$W_n(G';x)=\sum_{k=0}^{4}C_n(G',k)x^k\ ;$$

إذ أن

$$C_n(G',0)=p\binom{p-1}{n-2};$$

$$C_n(G',1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-\frac{n-1}{t_1+t_2})\binom{t_1+t_2}{n-1}+(t_1-\frac{n-1}{r+t_1-1})\binom{r+t_1-1}{n-1}\right.$$
$$\left.+t_2\binom{r+t_2-1}{n-1}\right\};$$

$$C_n(G',2)=(1-\frac{(n-1)(2-r)}{t_1+t_2})\binom{t_1+t_2}{n-1}+(t_1-\frac{n-1}{r+t_1-1})\binom{r+t_1-1}{n-1}$$
$$+t_2\binom{r+t_2-1}{n-1}-\binom{t_1-1}{n-1}-(t_2+\frac{r(t_1-1)}{r-n+1})\binom{r-1}{n-1};$$
$$C_n(G',3)=(\frac{r\,t_2}{n-1}-t_2+t_1-1)\binom{r-1}{n-2}+(r-1)\binom{t_1+t_2-1}{n-1}-(r-2)\binom{t_1-1}{n-1};$$
$$C_n(G',4)=(r-1)\binom{t_1-1}{n-1}+(t_1-1)\binom{r-1}{n-1}.$$

البرهان: من العلاقة(1.1)

$$C_n(G',0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

وأن

$$\sum_{k=1}^{4}C_n(G',k)=p\binom{p-1}{n-1}$$

فان

$$C_n(G',1)=p\binom{p-1}{n-1}-\sum_{y\in V(G')}\binom{p-1-\deg_{G'}y}{n-1}$$
$$=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-1)\binom{t_1+t_2}{n-1}+\binom{t_1+t_2-1}{n-1}+\binom{r+t_1-2}{n-1}\right.$$
$$+(t_1-1)\binom{r+t_1-1}{n-1}+t_2\binom{r+t_2-1}{n-1}$$

وبتبسيط المقدار أعلاه نحصل على الصيغة المذكورة في نص المبرهنة.

ولإيجاد $C_n(G',3)$، نلاحظ أن هناك خمس حالات لـ (y,S) يكون فيها $d_n(y,S)=3$ وهذه الحالات هي

1) $y\in V(K_r)-\{v\}$;	$S\subseteq V_2$
2) $y\in V_2$;	$S\subseteq V(K_r)-\{v\}$
3) $y=v$;	$S\subseteq V_1-\{u_1\}$
4) $y\in V_1-\{u_1\}$;	$S=\{v\}\cup T$, $\phi\neq T\subseteq V(K_r)-\{v\}$
5) $y\in V(K_r)-\{v\}$;	$S=T_1\cup T_2,\phi\neq T_1\subseteq V_2$ and $\phi\neq T_2\subseteq V_1-\{u_1\}$

وعليه فان

$$C_n(G',3)=(r-1)\binom{t_2}{n-1}+t_2\binom{r-1}{n-1}+\binom{t_1-1}{n-1}+(t_1-1)\binom{r-1}{n-2}$$
$$+(r-1)\sum_{i=1}^{n-2}\binom{t_2}{i}\binom{t_1-1}{n-i-1}$$

وبالتبسيط نحصل على الصيغة المعطاة في نص المبرهنة.

ولإيجاد $C_n(G',4)$ نلاحظ أن $d_n(v,S)=4$ في حالتين هما

1) $y\in V(K_r)-\{v\}$; $S\subseteq V_1-\{u_1\}$

2) $y\in V_1-\{u_1\}$; $S\subseteq V(K_r)-\{v\}$

ومنها نحصل على

$$C_n(G',4)=(r-1)\binom{t_1-1}{n-1}+(t_1-1)\binom{r-1}{n-1}$$

وأخيرا من العلاقة

$$\sum_{k=2}^{4}C_n(G',k)=\sum_{y\in V(G')}\binom{p-1-\deg_{G'}y}{n-1}$$

نحصل على $C_n(G',2)$ كما هي معطاة في نص المبرهنة. #

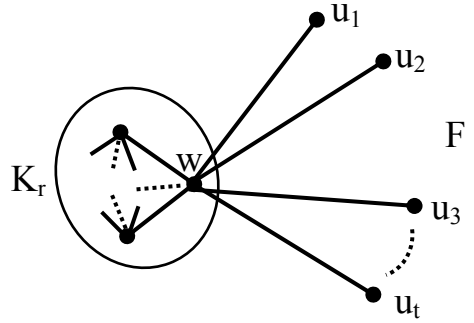
النتيجة2.4: دليل وينر-n للبيان $K_r:K_{t_1,t_2}$ هو

$$W_n(K_r:K_{t_1,t_2})=p\binom{p-1}{n-1}+(2r-1-\frac{r(n-1)}{t_1+t_2})\binom{t_1+t_2}{n-1}+t_2\binom{r+t_2-1}{n-1}$$
$$+(t_1-\frac{n-1}{r+t_1-1})\binom{r+t_1-1}{n-1}+r\binom{t_1-1}{n-1}+(t_2+t_1-1+\frac{r(t_1-1)}{r-n+1})\binom{r-1}{n-1}.\ \#$$

3. متعددة حدود وينر- n لبيان مركب من بيان تام مع نجمة:

ليكن F_t نجمة برتبة t، وأن c هو مركزا لها وu_1 هو أحد النهايات فيها. وليكن K_r بيان تام من الرتبة r إذ أن vهو رأس في K_r .

وليكن G البيان الناتج من تطابق المركز c مع أحد رؤوس البيان K_r وليكن الـ رأس v، كما مبين في الشكل (3.1) .فان رتبة البيان G هي$p=r+t-1$.



الشكل (3.1) البيان G

المبرهنة3.1: لكل $3 \le n \le p$، فان متعددة حدود وينر-n للبيان G المبين في شكل (3.1) هي

$$W_n(G;x) = p\binom{p-1}{n-2} + \left\{p\binom{p-1}{n-1} - (r-1)\binom{t-1}{n-1} - (t-1)\binom{r+t-3}{n-1}\right\}x$$
$$+\left\{(r-1)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r+t-3}{n-1}\right\}x^2.$$

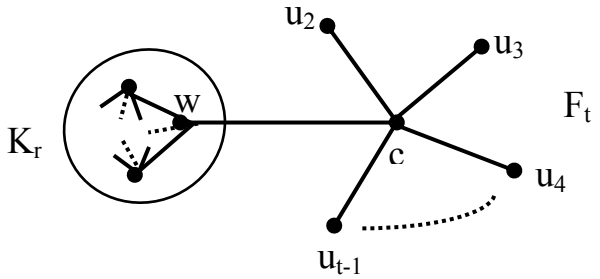
البرهان: واضح أن القطر-n لهذا البيان G لا يزيد على 2 ، وبذلك فان البرهان ينتج مباشرة من العلاقة (1.1) ومن المأخوذة (1.1). #

النتيجة 3.2: دليل وينر-n للبيان G الناتج من تطابق مركز النجمة F_t مع رأس من K_r هو

$$W_n(G) = p\binom{p-1}{n-1} + (r-1)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r+t-3}{n-1}. \ \#$$

وليكن G' البيان الناتج من تطابق أحد الرؤوس النهائية للنجمة F_t وليكن الرأس u_1 مع أحد رؤوس البيان K_r وليكن الرأس v،كما مبين في الشكل (3.2).

فان رتبة البيان G' هي $p = r + t - 1$.



الشكل (3.2) البيان G'

المبرهنة 3.3: لكل $3 \le n \le p$، فان متعددة حدود وينر-n للبيان G' المبين في شكل (3.2) هي

$$W_n(G';x) = p\binom{p-1}{n-2} + \left\{p\binom{p-1}{n-1} - (r - \frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-1} - (t-2)\binom{r+t-3}{n-1}\right.$$
$$\left. -\binom{r-1}{n-1}\right\}x + \left\{(t-2)\binom{r+t-3}{n-1} + (r-2+\frac{t-1}{n-1})\binom{t-2}{n-2}\right.$$
$$\left. -(t-3)\binom{r-1}{n-1}\right\}x^2 + \left\{(r-1)\binom{t-2}{n-1} + (t-2)\binom{r-1}{n-1}\right\}x^3.$$

البرهان: لنفرض أن w هو الرأس في G' الناتج من تطابق u_1 مع v.

واضح أن القطر-n لهذا البيان G' لا يزيد على 3 .

من العلاقة (1.1)، نجد ان

$$C_n(G',0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

ومن المأخوذة 1.1 نحصل على

$$C_n(G',1)=p\binom{p-1}{n-1}-(r-1)\binom{t-1}{n-1}-\binom{t-2}{n-1}-\binom{r-1}{n-1}-(t-2)\binom{r+t-3}{n-1}$$

$$=p\binom{p-1}{n-1}-(r-\frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-1}-\binom{r-1}{n-1}-(t-2)\binom{r+t-3}{n-1}$$

وأن

$$C_n(G',3)=(r-1)\binom{t-2}{n-1}+(t-2)\binom{r-1}{n-1}$$

لأنه إذا كان $d_n(y,S)=3$، فيجب أن يكون لـ (y,S) حالتان هما

1) $y\in V(K_r)-\{w\}$; $\quad S\subseteq V(F_t)-\{w,c\}$

2) $y\in V(F_t)-\{w,c\}$; $\quad S\subseteq V(K_r)-\{w\}$

ولما كان

$$C_n(G',2)+C_n(G',3)=\sum_{y\in V(G')}\binom{p-1-\deg_{G'}y}{n-1}$$

فان

$$C_n(G',2)=(t-2)\binom{r+t-3}{n-1}+(r-2+\frac{t-1}{n-1})\binom{t-2}{n-2}-(t-3)\binom{r-1}{n-1}.\ \#$$

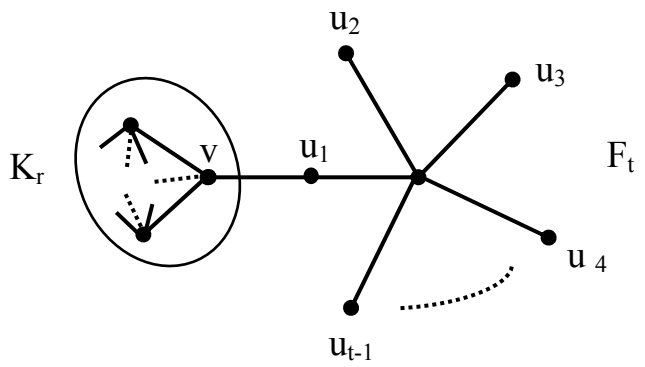
النتيجة 3.4:

دليل وينر-n للبيان G' الناتج من تطابق أحد نهايات النجمة F_t مع رأس من K_r هو

$$W_n(G')=p\binom{p-1}{n-1}+(t-2)\binom{r+t-3}{n-1}+(2r-1-\frac{r(n-1)}{t-1})\binom{t-1}{n-1}$$

$$+(t-1)\binom{r-1}{n-1}. \qquad \#$$

وليكن $\overline{G}$ البيان الناتج من إضافة حافة تصل رأسـا v مـن K_r مـع نهايـة u_1 مـن النجمة F_t كما مبين في الشكل (3.3). فان رتبة البيان $\overline{G}$ هـي $p=r+t$. وأن القطـر-n لا يزيد على 4.



الشكل (3.3) البيان $\overline{G}$

المبرهنة 3.5:

لكل $3 \le n \le p$ ، فان متعددة حدود وينر-n للبيان $\overline{G}$ المبين في شكل (3.3) هي

$$W_n(\overline{G};x)=\sum_{k=0}^{4} C_n(\overline{G},k)x^k;$$

إذ أن

$$C_n(\overline{G},0)=p\binom{p-1}{n-2};$$

$$C_n(\overline{G},1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(t-1-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1}+(r-\frac{n-1}{t})\binom{t}{n-1}+\binom{r}{n-1}\right\};$$

$$C_n(\overline{G},2)=(t-1-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1}+(\frac{n-1}{r}+2-t)\binom{r}{n-1}+(r-\frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-2};$$

$$C_n(\overline{G},3)=(t-3+\frac{r}{n-1})\binom{r-1}{n-2}+(r-2+\frac{t-1}{n-1})\binom{t-2}{n-2};$$

$$C_n(\overline{G},4)=(r-1)\binom{t-2}{n-1}+(t-2)\binom{r-1}{n-1}.$$

البرهان: من العلاقة(1.1) نحصل على

$$C_n(\overline{G},0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

ومن المأخوذة 1.1 نحصل على

$$C_n(\overline{G},1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(t-2)\binom{p-2}{n-1}+\binom{p-3}{n-1}+\binom{r}{n-1}+\binom{t-1}{n-1}+(r-1)\binom{t}{n-1}\right\}$$

وبتبسيط المقدار أعلاه نحصل على الصيغة المذكورة في نص المبرهنة .

وإذا كان $d_n(y,S) = 3$ ، فانه يوجد أربع حالات وهي

1) $y \in V(F_t) - \{c,u_1\}$; $\quad S = \{v\} \cup T,\ \phi \neq T \subseteq V(K_r) - \{v\}$

2) $y \in V(K_r) - \{v\}$; $\quad S = \{c\} \cup T,\ \phi \neq T \subseteq V(F_t) - \{c,u_1\}$

3) $y = v$; $\quad S \subseteq V(F_t) - \{c,u_1\}$

4) $y = c$; $\quad S \subseteq V(K_r) - \{v\}$

وباحتساب عدد الأزواج (y,S) لكل من هذه الحالات نحصل على

$$C_n(\overline{G},3) = (t-2)\binom{r-1}{n-2} + (r-1)\binom{t-2}{n-2} + \binom{t-2}{n-1} + \binom{r-1}{n-1}$$

وبتبسيط هذا المقدار نحصل على الصيغة المذكورة في نص المبرهنة .

ولغرض إيجاد $C_n(\overline{G},4)$ نلاحظ أن $d_n(y,S) = 4$ تكون في حالتين فقط هما

1) $y \in V(K_r) - \{v\}$; $\quad S \subseteq V(F_t) - \{c,u_1\}$

2) $y \in V(F_t) - \{c,u_1\}$; $\quad S \subseteq V(K_r) - \{v\}$

وبذلـك نحصل على $C_n(\overline{G},4)$ ، كما هي مذكورة في المبرهنة.

ولما كان

$$C_n(\overline{G},2) + C_n(\overline{G},3) + C_n(\overline{G},4) = \sum_{y \in V(\overline{G})} \binom{p-1-\deg_{\overline{G}} y}{n-1}$$

نحصل على $C_n(\overline{G},2)$ كما هي مذكورة في المبرهنة. #

النتيجة3.6: دليل وينر-n للبيان $\overline{G}$ الناتج من إضافة حافة تصل رأسا v من K_r مـع أحد نهايات العجلة F_t هو

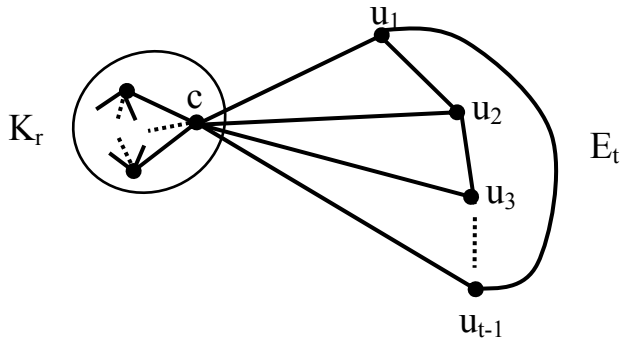
$$W_n(\overline{G}) = p\binom{p-1}{n-1} + (t-1-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1} + (r-1)\binom{t}{n-1}$$
$$+ (t-1)(2-\frac{n-1}{r})\binom{r}{n-1} + r(2-\frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-1}. \quad \#$$

4. متعددة حدود وينر- n لبيان مركب من بيان تام مع عجلة:

ليكن E_t عجلة برتبة t وأن c مركزا لها. وأن u_1 هو أحد رؤوسها الأخرى (من الدرجة الثالثة). وليكن K_r بيانا تاما من الرتبة r ،وأن v هو رأس في K_r .

وليكن G البيان الناتج من E_t و K_r وذلـك بتطابق المركز c مع الرأس v كما مبين في الشكل (4.1) .

من الواضح أن رتبة البيان G هي $p = r + t - 1$ وأن القطر-n له لا يزيد على 2.



الشكل (4.1) البيان G

المبرهنة4.1: لكل $3 \le n \le p$، فان متعددة حدود وينـر-n للبيـان G المبـين فـي شكل(4.1) هي

$$W_n(G;x) = p\binom{p-1}{n-2} + \left\{p\binom{p-1}{n-1} - (r-1)\binom{t-1}{n-1} - (t-1)\binom{r+t-5}{n-1}\right\}x$$
$$+\left\{(r-1)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r+t-5}{n-1}\right\}x^2 .$$

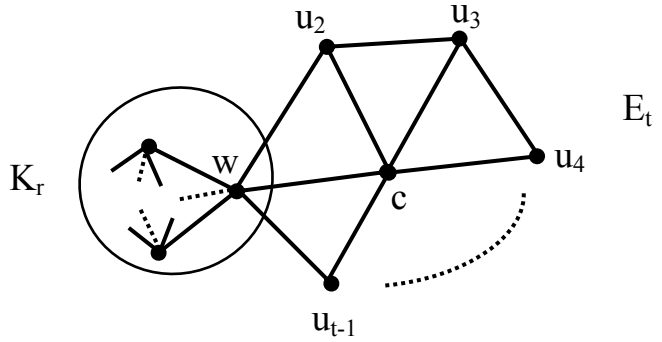
البرهان: بما أن القطر-n للبيان G لا يزيد على 2، فان البرهان ينـتج مباشـرة مـن العلاقة (1.1) ومن المأخوذة 1.1. #

النتيجة 4.2: دليل وينر-n للبيان G الناتج من تطابق المركز c للنجمة E_t مع الرأس v للبيان K_rهو

$$W_n(G) = p\binom{p-1}{n-1} + (r-1)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r+t-5}{n-1}. \qquad \#$$

ليكن G'البيان الناتج من E_t و K_r وذلـك بتطابق الرأس u_1 من E_t مع الرأس v من K_r، ولنرمز لرأس التطابق بالحرف w، لاحظ الشكل (4.2) .

واضح أن رتبة البيان G' هي $p = r + t - 1$ وأن القطر-n له لا يزيد على 3.



الشكل (4.2) البيان G'

المبرهنة 4.3:

لكل $3 \le n \le p$ ، فان متعددة حدود وينر-n للبيان G' المبين في شكل(4.2) هي

$$W_n(G';x)=\sum_{k=0}^{3} C_n(G',k)x^k;$$

إذ أن

$$C_n(G',0)=p\binom{p-1}{n-2};$$

$$C_n(G',1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-1)\binom{t-1}{n-1}+\binom{t-4}{n-1}+(t-2)\binom{r+t-5}{n-1}+\binom{r-1}{n-1}\right\}$$

$$C(G'_n,2)=(r-1)\binom{t-1}{n-1}+(t-2)\binom{r+t-5}{n-1}-(r-2)\binom{t-4}{n-1}$$
$$-(t-5)\binom{r-1}{n-1};$$

$$C_n(G',3)=(r-1)\binom{t-4}{n-1}+(t-4)\binom{r-1}{n-1}.$$

البرهان: من القضايا السابقة لدينا، فان

$$C_n(G',0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

و

$$C_n(G',1)=p\binom{p-1}{n-1}-\sum_{y\in V(G')}\binom{p-1-\deg_{G'}y}{n-1}$$
$$=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-1)\binom{t-1}{n-1}+\binom{t-4}{n-1}+(t-2)\binom{r+t-5}{n-1}+\binom{r-1}{n-1}\right\}$$

وأن

$$C_n(G',3)=(r-1)\binom{t-4}{n-1}+(t-4)\binom{r-1}{n-1}$$

لأنه إذا كان $d_n(y,S)=3$ فيجب أن يكون للزوج (y,S) حالتان هما

1) $y\in V(K_r)-\{w\}$; $\quad S\subseteq V(E_t)-\{c,u_1,u_2,u_{t-1}\}$

2) $y\in V(E_t)-\{c,u_1,u_2,u_{t-1}\}$; $\quad S\subseteq V(K_r)-\{w\}$

وباحتساب عدد الأزواج (y,S) لكل من الحالتين أعلاه نحصل على $C_n(G',3)$ كما هي معطاة.

وبما أن

$$C_n(G',2)+C_n(G',3)=\sum_{y\in V(G')}\binom{p-1-\deg_{G'}y}{n-1}$$

فان

$$C(G'_n,2)=(r-1)\binom{t-1}{n-1}+(t-2)\binom{r+t-5}{n-1}-(r-2)\binom{t-4}{n-1}$$
$$-(t-5)\binom{r-1}{n-1} \qquad \#$$

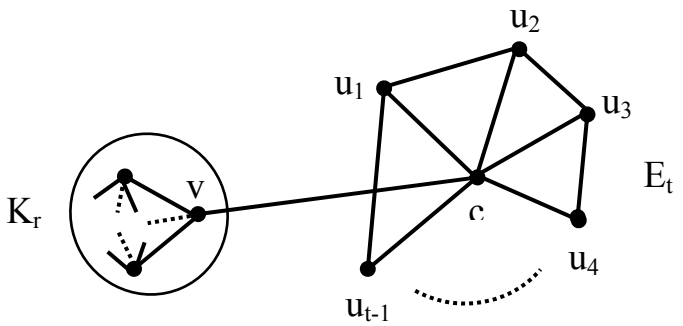
النتيجة 4.4:

دليل وينر-n للبيان G' الناتج من تطابق الرأس u_1 من E_t مع الرأس v من K_r هو

$$W_n(G')=p\binom{p-1}{n-1}+(r-1)\binom{t-1}{n-1}+r\binom{t-4}{n-1}+(t-3)\binom{r-1}{n-1}$$
$$+(t-2)\binom{r+t-5}{n-1}. \qquad \#$$

ليكن G'' البيان الناتج من العجلة E_t والبيان التام K_r بإضافة حافة تصل الرأس v من K_r مع المركز c من E_t كما مبين في الشكل (4.3).

من الواضح أن رتبة البيان G'' هي $p=r+t$ وأن القطر-n له لا يزيد على 3.



الشكل (4.3) البيان G''

المبرهنة 4.5: لكل $3\le n\le p$ ، فان متعددة حدود وينر-n للبيان G'' المبين في شكل(4.3) هي

$$W_n(G'';x)=\sum_{k=0}^{3}C_n(G'',k)x^k;$$

إذ أن

$$C_n(G'',0)=p\binom{p-1}{n-2};$$

$$C_n(G'',1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-\frac{n-1}{t})\binom{t}{n-1}+\binom{r-1}{n-1}+(t-1)\binom{r+t-4}{n-1}\right\};$$

$$C_n(G'',2)=(r-2+\frac{t}{n-1})\binom{t-1}{n-2}+(t-1)\binom{r+t-4}{n-1}-(t-2)\binom{r-1}{n-1};$$

$$C_n(G'',3)=(r-1)\binom{t-1}{n-1}+(t-1)\binom{r-1}{n-1}.$$

البرهان: إن كلا من $C_n(G'',0)$ **و** $C_n(G'',1)$ تنتج من العلاقة(1.1) والمأخوذة (1.1).

لإيجاد $C_n(G'',3)$ نلاحظ أن هناك حالتين فقط للزوج (y,S) عندما يكون $d_n(y,S)=3$ هي

1) $y\in V(K_r)-\{v\}$; $S\subseteq V(E_t)-\{c\}$

2) $y\in V(E_t)-\{c\}$; $S\subseteq V(K_r)-\{v\}$

وباحتساب عدد الأزواج (y,S) لكل من الحالتين أعلاه نحصل على $C_n(G'',3)$، كما هي معطاة في نص المبرهنة.

ويمكننا أن نحصل على $C_n(G'',2)$ من العلاقة

$$C_n(G'',2)+C_n(G'',3)=\sum_{y\in V(G'')}\binom{p-1-\deg_{G''}y}{n-1}$$

وبهذا يتم البرهان. #

النتيجة 4.6:

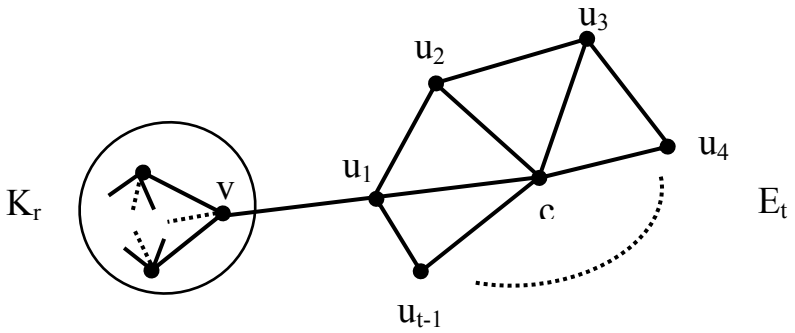
دليل وينر-n للبيان G'' الناتج من إضافة حافة تصل رأسا v من K_r مع المركز c من E_t هو

$$W_n(G'')=p\binom{p-1}{n-1}+t\binom{r-1}{n-1}+(t-1)\binom{r+t-4}{n-1}+(2r-1-\frac{r(n-1)}{t})\binom{t}{n-1}.$$

#

ليكن $\overline{G}$ البيان الناتج من العجلة E_t والبيان التام K_r بإضافة حافة تصل رأسا v من K_r مع الرأس u_1 من E_t كما هو مبين في الشكل (4.4).

من الواضح أن رتبة البيان $\overline{G}$ هي $p=r+t$ وأن القطر-n له لا يزيد على 4.



الشكل (4.4) البيان $\overline{G}$

المبرهنة 4.7: لكل $3 \le n \le p$ ، فان متعددة حدود وينر-n للبيان $\overline{G}$ المبين في شكل(4.4) هي

$$W_n(\overline{G};x)=\sum_{k=0}^{4}C_n(\overline{G},k)x^k;$$

إذ أن

$$C_n(\overline{G},0)=p\binom{p-1}{n-2};$$

$$C_n(\overline{G},1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-\frac{n-1}{t})\binom{t}{n-1}+(t-1-\frac{n-1}{r+t-4})\binom{r+t-4}{n-1}+\binom{r}{n-1}\right\};$$

$$C_n(\overline{G},2)=(r-\frac{n-1}{t})\binom{t}{n-1}+(t-1-\frac{n-1}{r+t-4})\binom{r+t-4}{n-1}-\binom{t-4}{n-1}-(t-2-\frac{3n-3}{r})\binom{r}{n-1}-(r-1)\sum_{i-0}^{3}\binom{3}{i}\binom{t-4}{n-i-1};$$

$$C_n(\overline{G},3)=(t-7+\frac{3r}{n-1})\binom{r-1}{n-2}+\binom{t-4}{n-1}+(r-1)\sum_{i-1}^{3}\binom{3}{i}\binom{t-4}{n-i-1};$$

$$C_n(\overline{G},4)=(r-1)\binom{t-4}{n-1}+(t-4)\binom{r-1}{n-1}.$$

البرهان: واضح أن $C_n(\overline{G},0)$ وأن $C_n(\overline{G},1)$ كما هي معطاة في المبرهنة.

الآن لكي نجد $C_n(\overline{G},3)$ نلاحظ أن للزوج (y,S) أربع حالات فقط عندما $d_n(y,S)=3$ وهذه الحالات هي

1) $y\in\{c,u_2,u_{t-1}\}$; $\quad S\subseteq V(K_r)-\{v\}$

2) $y\in V(E_t)-\{c,u_1,u_2,u_{t-1}\}$; $\quad S=\{v\}\cup T,\ \phi\neq T\subseteq V(K_r)-\{v\}$

3) $y=v$; $\quad S\subseteq V(E_t)-\{c,u_1,u_2,u_{t-1}\}$

4) $y\in V(K_r)-\{v\}$; $\quad S=T_1\cup T_2\ ,\ \phi\neq T_1\subseteq\{c,u_2,u_{t-1}\}$ and $T_2\subseteq V(E_t)-\{c,u_1,u_2,u_{t-1}\}$

وباحتساب عدد الأزواج (y,S) لكل من الحالات الأربعة فنحصل على

$$C_n(\overline{G},3)=3\binom{r-1}{n-1}+(t-4)\binom{r-1}{n-2}+\binom{t-4}{n-1}+(r-1)\sum_{i-1}^{3}\binom{3}{i}\binom{t-4}{n-i-1}$$
$$=(t-7+\frac{3r}{n-1})\binom{r-1}{n-2}+\binom{t-4}{n-1}+(r-1)\sum_{i-1}^{3}\binom{3}{i}\binom{t-4}{n-i-1}$$

ولكي نجد $C_n(\overline{G},4)$، نلاحظ أن هناك حالتين فقط للزوج (y,S)عندما يكون

$d_n(y,S) = 4$ وهاتان الحالتان هما

$$1)\ y \in V(K_r) - \{v\}; \qquad S \subseteq V(E_t) - \{c, u_1, u_2, u_{t-1}\}$$

$$2)\ y \in V(E_t) - \{c, u_1, u_2, u_{t-1}\}; \qquad S \subseteq V(K_r) - \{v\}$$

وباحتساب عدد الأزواج (y,S) لكل من الحالتين أعلاه نحصل على

$$C_n(\overline{G},4) = (r-1)\binom{t-4}{n-1} + (t-4)\binom{r-1}{n-1}$$

وأخيرا يمكن إيجاد $C_n(\overline{G},2)$ من العلاقة المعروفة

$$C_n(\overline{G},2) + C_n(\overline{G},3) + C_n(\overline{G},4) = \sum_{y \in V(\overline{G})} \binom{p-1-\deg_{\overline{G}} y}{n-1}. \quad \#$$

النتيجة 4.8: دليل وينر-n للبيان $\overline{G}$ الناتج من إضافة حافة تـصل رأسـا v مـن K_r مـع الرأس u_1 من E_t هو

$$W_n(\overline{G}) = p\binom{p-1}{n-1} + (r - \frac{n-1}{t})\binom{t}{n-1} + (t-1-\frac{n-1}{r+t-4})\binom{r+t-4}{n-1}$$
$$+ (2t-4-\frac{(t-1)(n-1)}{r})\binom{r}{n-1} + r\binom{t-4}{n-1} + (r-1)\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\binom{t-4}{n-i-1}.$$

البرهان:

بعد اشتقاق متعددة حدود وينر-n للبيان من المبرهنة 4.7 بالنسبة لـ x والتعـويض عن $x = 1$ ، واجراء التبسيط الجبري نحصل على الصيغة المذكورة. #

المصادر

[1] A.M. Ali ; (2005), **Wiener Polynomials Of Generalized Distance in Graphs**, M. Sc. Thesis, Mosul University,Mosul.

[2] F. Buckley and F. Harary; (1990). **Distance in Graphs**. Addison – -Wesley, New York.

[3] P. Dankelmann,W. Goddard, M.A. Henning and H.C. Swart; (1999). Generalized eccentricity, radius and diameter in graphs. Foundation for Research Development. c 1999 John Wiely & Sons, Inc. Networks **34**: 312-319.

[4] I. Gutman; (1993). Some properties of the Wiener polynomial; Graph Theory Notes of New York; **XXV**. The New York Academy of Sciences 13-17.

[5] B.E. Sagan, Y.N. Yeh and P. Zhang; "The wiener polynomial of a graphs"; International J. Qutman Chem.**60, No.5**, 959-969, (1996).