المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (25) 2013
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي السادس لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص[275-297]

تحليل بيز لنموذج التحليل العاملي الطبيعي المُختلط

د.هيفاء عبد الجواد سعيد*   أحمد سامي أحمد**

المستخلص

ينتمي نموذج التحليل العاملي الى عائلة النماذج الخطية وبسبب أن البيانات متعددة المتغيرات لا تخلو من المشاهدات الشاذة لذلك تركز بحثنا بالتحليل البيزي لنموذج التحليل العاملي الطبيعي المُختلط . إن التوزيع الطبيعي المُختلط يُعامل مشاهدات العينة على أنها مسحوبة من مجتمعين مُختلفين وليس من مُجتمع واحد . وتم تحليل النموذج عندما يكون العامل المُشترك متغيراً عشوائياً و غير عشوائي مُفترضين أن جميع معلمات النموذج غير معلومة ويكون لبعضٍ منها توزيعات أولية تنتمي الى العوائل المُتآلفة .

ان عدد العوامل المستخلصة لا يُمكن معرفتهُ مُسبقاً وعلى هذا الاساس تم مُعاملته على أن أنهُ متغيراً عشوائياً ونستنتج معيار الاحتمال اللاحق لعدد العوامل الواجب ادخالها في النموذج .

تم تطُبيق النتائج على بيانات تجريبية وبحجمي عينتين مُختلفين وبأشكال مُختلفة لمصفوفة تحميلات العوامل ومصفوفة تباين حد الخطأ واستنتجنا بأن النماذج المُقدرة ذات العوامل غير العشوائية أفضل من النماذج بالعوامل العشوائية من جهةٍ أُخرى ازدادت قيم التحميلات المعنوية للمُتغيرات على العوامل العشوائية وغير العشوائية بزيادة حجم العينة .

Bayesian Analysis of Mixture of Normal Factor Analysis Model

Abstract

Factor analysis model belongs to a family of linear models and because the multivariate data sets do not vacate outliers . For this reason , this paper is concerned with Bayesian analysis of mixed normal factor analysis model . The mixture normal distribution treats the observations of a sample as they are taken from two different populations and none from single population . The model is analyzed when the common factor is (stochastic and non-stochastic) variable . We suppose that all the parameters of the model are unknown , some of them have prior distributions belong to the conjugate family.

* أستاذ مساعد / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

**مدرس مساعد/ قسم الإحصاء/ كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة دهوك

تاريخ استلام البحث 2013/10/9 ــــــــــــــــــــ تأريخ القبول 2013/11/21

The number of extracted factors cannot be determined a priori and for this reason it is considered as a random variable , and we so conclude the posterior probability criterion for the number of factors that must be entered in the model .

The results concluded are applied to empirical data with two different sample sizes and different forms for the factor loadings matrix and variance matrix of the error term . We concluded that the estimated models with non-stochastic factors is better than stochastic factors . On the other hand the significant factor loadings values increased for the variables on the random and non-random factors as the sample size increases .

(1) المقدمة

في مجموعة البيانات تظهر احياناُ قيمة واحدة أو أكثر بعيدة عن مجموعة القيم الاخرى ، هذه القيم تبدو غير منطقية إذا ما قورنت بجميع مُشاهدات العينة . تؤدي تلك القيم الى معنوية تمثيل المُجتمع إذ من الممكن أن تُلوث المُقدرات أو الاختبارات الاحصائية لمعلمات المُجتمع وبالتالي يبتعد عن التقدير الحصين (Robust Estimator) .

صنفت التوزيعات الاحتمالية الى عائلتين ، الاولى ، تكون عُرضةً للقيم الشاذة (Outlier Prone) والثانية تكون مُقاومة للقيم الشاذة (Outlier Resistant) فالتوزيعات التي تكون عرضةً للقيم الشاذة لها نهايات تؤول الى الصفر ببطء وتكون عرضةً للقيم الشاذة بشكل مُطلق كالتوزيع الطبيعي ، أما التوزيعات الاحتمالية المُقاومة للقيم الشاذة تتمثل بالتوزيعات الاحتمالية الملوثة كتوزيع كاما ((Green (1976) اضافةً الى توزيعات ذات الذيول الثقيلة (Heavy Tailed) كتوزيع t وتوزيع Bessel (أحمد 2011) .

والتوزيعات الاحتمالية المُلوثة (Contaminated Probability Distributions) والتي تتكون من نوعين من التوزيعات أحدهما هو التوزيع الاساسي الذي يُولد مُشاهدات جيدة والثاني هو التوزيع المُلوث الذي يُولد قيماً شاذة بنسبة خلط مقدارُها (P و $0<P<1$) (أحمد (2011)) .

لا يختلف نموذج التحليل العاملي عن نموذج الانحدار الخطي سوى أن مُشاهدات المُتغيرات التوضيحية في نموذج التحليل العاملي غير مُشاهدة وسماها الباحثون بالمُتغيرات الصماء (Latent Variables) التي تتمثل بالعوامل العامة المُستخلصة التي تُفسر نسبة كبيرة من التباين الكلي . إن أغلب البيانات لمشاكل مُختلفة بالأخص في مجال الاقتصاد والزراعة والطب ... الخ تحتوي على مُشاهدات شاذة ومن الممكن استخدام نماذج التحليل العاملي غير الطبيعية لتقليل تأثير المُشاهدات الشاذة في مجموعة البيانات مُتعددة المُتغيرات والوصول الى عوامل عامة تُفسر نسبة كبيرة من التباين الكلي .

لقد كان اهتمام الكثير من الباحثين بالتحليل البيزي لنموذج التحليل العاملي كان أولهم العالم Mayekawa(1985) فقد افترض بان التوزيع الاولي لمصفوفة تحميلات العوامل العامة يتبع التوزيع الطبيعي القياسي واستنتج الاحتمالات اللاحقة لمصفوفتي العوامل العامة وتباين الاخطاء . واستخدم ((Geweke(1993) اسلوب بيز في النموذج الخطي الذي يكون فيه حد الخطأ منتمياً الى عائلة التوزيعات الاحتمالية ذات الذيول الثقيلة واستخدم معيار نسبة الترجيح اللاحقة في تحديد عدد العوامل المُستخلصة . وافترضا ((Lee and Press (1998) بأن حد الخطأ ينتمي الى التوزيعات المُلوثة فقد استخدما نوعين من المسافات الاقليدية واستنتجا المُقدرات الحصينة لمصفوفة تحميلات العوامل العامة ومصفوفة التباين لحد الخطأ .
استخدم (أحمد(2011)) اسلوب بيز في تقدير معلمات نوعين من نماذج التحليل العاملي غير الطبيعية وهُما (نموذج tFA) و (نموذج التحليل العاملي الطبيعي المُختلط (MNFA)) فقد عامل عدد العوامل العامة الداخلة في التحليل على أنها متغيراً عشوائياً .

هدف البحث

نظراً لكون التوزيع الطبيعي المُختلط ينتمي الى عائلة التوزيعات الاحتمالية المُقاومة للقيم الشاذة فقد تركز اهتمامُنا بالتحليل البيزي لنموذج التحليل العاملي الطبيعي المُختلط باستخدام معلومات أولية عن معلمات النموذج تنتمي الى العائلة المُتآلفة .

(2) نموذج التحليل العاملي الطبيعي Normal Factor Analysis Model

تكمُن أهمية التحليل العاملي بوصفه نموذجا رياضياً لتحليل العلاقات بين عدد كبير من المتغيرات وتفسيرها في عدد قليل من العوامل التي تعكس واقع البيانات الخاضعة للتحليل ، والكشف عن بعض العلاقات غير المتوقعة التي تبدو متميزة في بادئ الأمر ومن ثم يتضح أنها ليست لها أهمية تذكر والعكس صحيح (Loehlin, 2004) ، لذلك يمكن تفسير النموذج العاملي لـ (p) من المتغيرات بأنه عبارة عن دالة خطية لـ (p) من متوسطات المتغيرات لــ (q) من العوامل الشائعة أو المشتركة (Common) و (p) من العوامل الوحيدة (Unique Factors) لكل متغير إذ إن $(q < p)$ ، عليه فأن النموذج العاملي يُمكن صياغته كالآتي (Press, J.and Shigemasu, 1999) :

$$\underline{x}_j = \underline{\mu} + \Lambda \cdot \underline{f}_j + \varepsilon_j \quad ; \; j = 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots(1)$$

إذ إن :

$\underline{x}_j$: متجه ذا سعة $(p \times 1)$ لــ (p) من المتغيرات .

$\underline{\mu}$: متجه ذا سعة $(p\times1)$ لـ (p) من أوساط المتغيرات .

Λ : مصفوفة ذات سعة $(p\times q)$ من تحميلات العوامل .

$\underline{f}_j$: متجه ذا سعة $(q\times1)$ لـ (q) من العوامل المشتركة .

ε_j : متجه ذا سعة $(p\times1)$ لـ (p) من العوامل الوحيدة ويسمى أيضا بمتجه الأخطاء العشوائية لهُ توزيع احتمالي يوصف بـ $j=1,2,.....,p$ $\varepsilon_j \sim N_p(\underline{0},\sigma^2\psi)$

وهكذا كل استجابة للمتغيرات تتكون من قسمين الأول تُسببه العوامل العامة التي هي عبارة عن تركيبة خطية من العوامل (q) أما القسم الثاني فانه يأتي عن طريق العامل الوحيد الذي يحتوي على التأثيرات الأخرى جميعاً الموجودة في العوامل الأخرى التي عددُها$(p-q)$. (Press, J.and Shigemasu, 1999)

يُمكن تعريف نوعين من نمــاذج التحليــل العــاملي يعتمد كل نوع على طبيعة $(\underline{f}_j; j=1,2,........,n)$ المعرف في المعادلة أعلاه وكالآتي :

1- نموذج التحليل العاملي ذو العوامل غير العشوائية في هذا النوع يعامل $(\underline{f}_j; j=1,2,........,n)$ على أنهُ متغير غير عشوائي (Non stochastic Variable) وفي هذه الحالة يُسمى $(\underline{f}_j)$ بالمعلمة العرضية (Incidental Parameter) . في هذه الحالة يتم تقدير المعلمات في النموذج (1-1) المتمثلة بـ $(\underline{\mu},\Lambda,\underline{f}_j,\psi)$ بإحدى طرائق التقدير المألوفة ، وعند معاملة $(\underline{f}_j)$ بوصفه متغيراً غير عشوائي يكون $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{f}_j=0\right)$ و $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{f}_j\underline{f}_j{}'=\Phi\right)$ وتحت شرط التعامد (Orthogonality) تكون $(\Phi=I_q)$.

2- أنموذج التحليل العاملي ذو العوامل العشوائية يُعامل $(\underline{f}_j; j=1,2,........,n)$ المعرف في المعادلة (1-1) على أنهُ متغير عشوائي عزمهُ الأول والثاني حول الصفر مساوٍ لمتجه صفري وتباينهُ هو المصفوفة (Φ) ذات سعة $(q\times q)$ وتحت شرط التعامد عادةً تكون $(\Phi=I_q)$. وفي هذا النوع من النماذج يتم تقدير المعلمات $(\underline{\mu},\Lambda,\psi)$ بإحدى طرائق التقدير .

(3) معيار تعظيم الاحتمال اللاحق لاختيار عدد العوامل

عند إستخدام أسلوب بيز في تحليل نموذج التحليل العاملي ولغرض تحديد عدد العوامل يتم إستخدام معيار تعظيم الاحتمال اللاحق لعدد العوامل الذي يستند إلى حساب الاحتمال اللاحق لعدد العوامل(q) ، ومن ثُم نقوم باختيار عدد العوامل للنموذج الذي يُعظم قيمة الاحتمال اللاحق (Press.2003) ، ويُمكن حِسابهُ وفق المعادلة الآتية :

$$p(Q=q|X)=K(X)\cdot p(X|Q=q)\cdot p(Q=q) \qquad ...(2)$$

إذ إن :

$p(Q=q)$: الاحتمال الأولي لعدد العوامل .

$p(X|Q=q)$: دالة الترجيح للبيانات المشاهدة.

$K(X)$: ثـابت المساواة أو التطبيع (Normalizing Constant) .

بما أن عدد العوامل العامة (q)المستخدمة في نموذج التحليل العاملي غير معلوم ، لذا فإنهُ في أسلوب بيز يفترض أن عدد العوامل يكون متغيراً عشوائيا الذي يُرمز له بـ (Q) ، ويتم إيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق لعدد العوامل$p(Q=q|X)$ الذي سبق تعريفهُ في المعادلة العامة (2) عند ذلك نقوم باختيار عدد العوامل لنموذج التحليل العاملي المرجح اللاحق لعدد العوامل وبذلك نكونُ قـد استطعنا توظيف أسلوب بيز في تحديد عدد العوامل ،وغالباً ما تتم المقارنة بعد أخذ اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق وذلك لغرض السهولة والدقة في النتائج(أُنظرإلى ((Press, J.and Shigemasu, 1999

(4) نموذج التحليل العاملي الطبيعي المُختلط Mixture of Normal Factor Analysis Model

يُعد التوزيع الطبيعي المُختلط من التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام للتوصل إلى إيجاد مقدرات لا تتأثر بالقيم الشاذة وهذا التوزيع يُعامل مشاهدات العينة على أنها سُحبت من مجتمعين مختلفين وليس من مجتمع واحد ، فالمشاهدةُ النظيفة يعاملُها على أنها مسحوبة من مجتمع طبيعي بمتوسط مقدارهُ μ_1 وتباين σ^2 باحتمال مقداره (p_1). أما المشاهدة الشاذة فيُعاملها على أنها مسحوبةُ من مجتمعٍ طبيعيُ أخر بمتوسط مقدارُه μ_2 وتباين $K\sigma^2$ $(K>1)$ وباحتمال مقدارُه $(1-p_1)$ بشرط أن $(1-p_1)$ لا تتجاوز قيمتهُ عن (0.16) .

والمجتمع الطبيعي الملوث (المختلط) لهُ دالة كثافة احتمال يُمكن تعريفها بالشكل الآتي (سعيد(2005)) :

$$f(\underline{x}_j) = p_1 f_1(\underline{x}_j) + (1-p_1) f_2(\underline{x}_j) \qquad \ldots(3)$$

إذ إن :

$$\left.\begin{aligned} f_1(\underline{x}_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(\underline{x}_j-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} \\ f_2(\underline{x}_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(\underline{x}_j-\mu_2)^2}{2K\sigma^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(4)$$

وتدعى $f_1(\underline{x}_j)$ و $f_2(\underline{x}_j)$ بمركبتي التوزيع الطبيعي المختلط . (سعيد(2005))

يمكن تعميم التوزيع الطبيعي المختلط أعلاه إلى حالة التوزيع الطبيعي المتعدد المتغيرات المختلط وذلك بجعل كل مركبة من مركبات التوزيع هي توزيع طبيعي مُتعدد ، وعليه يمكن الحصول على نموذج التحليل العاملي الطبيعي المختلط (MNFA) بافتراض أن التوزيع الاحتمالي لحد الخطأ $(\underline{\varepsilon}_j)$ المعرف في المعادلة (1-1) هو توزيع طبيعي مُتعدد المتغيرات مختلط ويوصف بالشكل الآتي (أحمد (2011)) .

$$\underline{\varepsilon}_j|\psi \sim p_1 N_p(0,\psi) + (1-p_1)N_p(0,K\psi) \quad ...(5)$$

إذ إن $K>1$.

1.3 التوزيع الاحتمالي اللاحق لعدد العوامل العامة (Q)

في هذه الفقرة سوف يتم إيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق لأنموذج (MNFA) عندما يكون $(\underline{f}_j)$ متغيراً غير عشوائياً وعشوائياً الذي لهُ أهمية كبيرة في تحديد عدد العوامل العامة المعنوية الواجب إدخالها في نموذج (MNFA) وكالآتي :

أولاً : عندما يكون (f_j) عاملاً غير عشوائي

إن دالة كثافة الاحتمال المختلطة لـ (x_j) يُعبر عنها وصفياً بالشكل الآتي :

$$\underline{x}_j \sim p_1 N_p(\underline{\mu} + \Lambda \underline{f}_j, \psi) + (1-p_1)N_p(\underline{\mu} + \Lambda \underline{f}_j, K\psi) \quad ...(6)$$

نفرض أن مُتجهات المشاهدات العشوائية المستقلة $(\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n)$ سُحبت من المجتمع المختلط المُعرّف في المعادلة (6) أعلاه تُدعى هذه المشاهدات بالبيانات المشاهدة ونفترض أنهُ مقابل كل مشاهدة $(\underline{x}_j)$ لجميع قيم $(j=1,2,......,n)$ وجود مشاهدات إضافية $Z_j=(Z_{j1} \quad Z_{j2})'$ فإذا وقعت $(\underline{x}_j)$ في المُركبة $(i\ , i=1,2\cdot)$ ، تأخذ Z_{ji} الرقم (1) وفيما عدا ذلك (سعيد،2005) تأخُذ Z_{ji} الرقم (0) لذلك فإن Z_j يأخُذ أحد الشكلين $\left(\underline{Z}_j=(1 \quad 0)'\right.$ أو $\left.\underline{Z}_j=(0 \quad 1)'\right)$ فإذا كانت $(\underline{x}_j)$ تنتمي إلى المُركبة الأولى سوف تأخذ $\underline{Z}_j$ الشكل الأول وفيما عدا ذلك سوف تأخذ Z_j الشكل الثاني . بعد الترميز يُمكن أن نِصف مصفوفة البيانات الإضافية بالشكل الآتي :

$$\left.\begin{array}{l} Z = \begin{pmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad Z'^{(1)} = \begin{pmatrix} \underline{1}_{n_1}{}' & 0_{(1\times n_2)}{}' \end{pmatrix} \\ \textit{where} \\ \qquad\qquad Z'^{(2)} = \begin{pmatrix} 0_{(1\times n_1)}{}' & \underline{1}_{n_2}{}' \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad ...(7)$$

إذ إن $\underline{1}_{n_1}$ و $\underline{1}_{n_2}$ يُمثلان متجهي الواحدات يحتويان على n_1 و n_2 من الواحدات على الترتيب . إن المشاهدات الإضافية $\underline{Z}_j$ التي تُدعى بالمتغير الأصم (Latent Variable) مُستقلة بعضها عن البعض الأخر ولها التوزيع نفسهُ (Identically Independent Distributed) . لهُ توزيع احتمالي عرفهُ سعيد (2005) عندما يكون مُتجه المشاهدة $(\underline{X}_j)$ يحتوي على p من المتغيرات وعندما يحتوي التوزيع المختلط على K من المركبات ، بعد استخدام المعادلة العامة التي وضعها (سعيد(2005)) التي تُمثل دالة الترجيح للبيانات الكاملة (للبيانات المشاهدة والإضافية) ، يُمكننا كتابة دالــة الترجيح المُشتركة لـ X,Z المشروطة بـ $Q=q$ كمـا موضحة في المعادلة الآتية (أحمد(2011))

$$p\left(X\ ,Z\ \middle|\underline{\mu}\ ,\Lambda\ ,F\ ,\psi\ ,\ p_1\ ,Q\ =\ q\right)=$$

$$\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n}\left[\ p_i\ f\left(\ \underline{x}_j\ \middle|\underline{\mu}\ ,\Lambda\ ,\ \underline{f}_j\ ,\psi\ \ ,Q\ \right)\right]^{Z_{ji}}\quad ...(7a)$$

$$=\left(2\pi\right)^{-\frac{np}{2}}\cdot\left|\psi\right|^{-\frac{\sum_{j=1}^{n}Z_{ji}}{2}}\cdot\left(p_1\right)^{\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}}\cdot\left(1-p_1\right)^{\sum_{j=1}^{n}Z_{j2}}\cdot$$

$$\exp\left\{\tfrac{-1}{2}tr\psi^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)'+\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_{j2}}{k}\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)'\right]\right\}$$

...(8)

إن التوزيع الاولي لنسبة الخلط يوصف كالآتي (سعيد (2005)) :

$$p_1\ \sim\ Beta\left(a_{\circ}\ ,b_{\circ}\right)\qquad ...(9)$$

التوزيع الاولي المشترك لـ $(\underline{\mu}\ ,F\ ,\Lambda\ ,\Psi\ )$ يُكتب على المعادلة الآتية :

$$p\left(\underline{\mu},F,\Lambda,\Psi\right)\propto\ p(\underline{\mu}).\,p(F).\,p(\Lambda|\Psi).\,p(\Psi)\qquad ...(10)$$

إن $p(F)$ و $p(\underline{\mu})$ يُمثلان التوزيع الاولي بالمعلومات الخبرية القليلة لكل من (F) و $(\underline{\mu})$ على الترتيب .

$$\left.\begin{aligned}p(F)&\propto\ \text{Constant Matrix}\\ p(\underline{\mu})&\propto\ \text{Constant Vector}\end{aligned}\right\}\qquad ...(11)$$

أما التوزيع الاولي لـ(Λ) المشروط بـ (ψ) فهو ينتمي إلى العائلة المتآلفة (Conjugate Family) وهو (Matrix Normal Distribution) وهذه الدالة تُعرف كالآتي : (أحمد(2011))

$$\Lambda\,|\psi\ \sim\ N_{p,q}\left(\Lambda_0\ ,\psi\ ,H\ \right)\qquad ...(12)$$

بعد دمج المعلومات المُسبقة عن المعلمات $(\underline{\mu},\Lambda,F,\psi)$ التي سبق تعريفها في المعادلات (10) و(11) و(12) على الترتيب مع المعلومات المُسبقة لـ (p_1) مع دالة الترجيح لـ (X,Z) المشروطة بـ $(Q=q)$ وإجراء بعض التبسيطات عليها نحصل على :

$$p\left(X,Z,\underline{\mu},\Lambda,F,\psi,p_1\middle|Q=q\right)=\frac{C_\circ(m,p)\cdot|B|^{\frac{m-p-1}{2}}\cdot|H|^{\frac{p}{2}}\cdot\overline{)a+b}}{(2\pi)^{\frac{(n+q)p}{2}}\cdot|\psi|^{\frac{m+n+q}{2}}\cdot\overline{)a}\cdot\overline{)b}}\cdot p_1^{\,a-1}(1-p_1)^{b-1}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{\left(n_1+\dfrac{n_2}{2}\right)}{2}\cdot\left(\underline{\mu}-\underline{\bar{x}}\right)'\psi^{-1}\left(\underline{\mu}-\underline{\bar{x}}\right)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2}tr\,\psi^{-1}\left[\mathrm{M}_F+(\Lambda-\mathrm{N}_F)K_F(\Lambda-\mathrm{N}_F)'\right]\right\}$$

...(13)

إذ إن :

$$a=a_\circ+n_1\quad;\quad b=b_\circ+n_2$$

$$n=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}Z_{ji}=\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}+\sum_{j=1}^{n}Z_{j2}\qquad;\quad \text{For i=1,2 .}$$

$$\underline{\bar{x}}=\frac{n_1\underline{\bar{x}}_1+\dfrac{n_2}{k}\underline{\bar{x}}_2}{n_1+\dfrac{n_2}{k}}$$

$$\mathrm{M}_F=\left(XZ^*F'-\left(C\otimes\underline{\mu}\right)Z^*F'+\Lambda_\circ H\right)\cdot\left(FZ^*F'+H\right)^{-1}$$

$$\mathrm{N}_F=\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}\left(\underline{x}_j-\underline{\bar{x}}_1\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\bar{x}}_1\right)'+\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_{j2}}{k}\left(\underline{x}_j-\underline{\bar{x}}_2\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\bar{x}}_2\right)'+\frac{n_1n_2}{n_1k+n_2}\left(\underline{\bar{x}}_1-\underline{\bar{x}}_2\right)\left(\underline{\bar{x}}_1-\underline{\bar{x}}_2\right)'$$
$$+B+\Lambda_\circ H\Lambda_\circ'+\left(XZ^*F'-\left(C\otimes\underline{\mu}\right)Z^*F'+\Lambda_\circ H\right)K_F^{-1}\left(XZ^*F'-\left(C\otimes\underline{\mu}\right)Z^*F'+\Lambda_\circ H\right)'\cdot$$

$$K_F=FZ^*F'+H$$

إذ إن (Z^*) عبارة عن مصفوفة مُربعة قطرية تُعطى بالشكل الآتي :

$$Z^*=\begin{pmatrix}I_{n1} & \underline{0}\\ \underline{0} & I_{n2}/k\end{pmatrix}=Z^{*\prime}$$

(C) يُمثل متجه صفي جميع عناصره تُمثل الواحد الصحيح .

يُتم أيجاد دالة الترجيح للبيانات الكاملة لـ (X,Z) المشروطة بـ $(Q=q)$ كالآتي :

$$p\left(X,Z\middle|Q=q\right)=\int_{p_1}\int_{F}\int_{\Lambda}\int_{\psi}\int_{\underline{\mu}}p\left(X,Z\middle|\underline{\mu},\Lambda,F,\psi,p_1,Q\right)\cdot p\left(\underline{\mu},\Lambda,F,\psi\middle|Q\right)p(p_1)\,d\underline{\mu}.d\psi.d\Lambda.dF.dp_1$$

...(14)

بعد التعويض عن مكونات المعادلة أعلاه والمعرفة بالمعادلات (8) و(9) على الترتيب وإجراء التكامل نحصل على :

$$p(X,Z|Q=q)=\frac{C_{\circ}(m,p)\cdot 2^{\frac{q-p-1}{2}}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{m+n+q-p-2}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{p}\sqrt{\frac{m+n+q-p-i}{2}}\cdot\sqrt{\frac{m+n+q-2p-2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(q+n-1)p}{2}}\cdot(\pi)^{\frac{n-0.5p+0.5}{2}}\cdot\left(n_1+\frac{n_2}{k}\right)^{\frac{p}{2}}\cdot\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{\frac{m+n+q-2p-2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{m+n-p-2}{2}}}$$

$$\cdot\frac{|B|^{\frac{m-p-1}{2}}\cdot|H|^{\frac{p}{2}}\cdot|H+nI_q|^{-\frac{m+n-2p-2}{2}}}{|W^*|^{\frac{m+n-p-2}{2}}\cdot|N^*|^{\frac{m-p-2}{2}}\cdot|I_n-X'W^{*-1}X|^{\frac{q}{2}}} \qquad \text{...(15)}$$

إذ إن :

$$W^*=\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}(\underline{x}_j-\overline{\underline{x}}_1)(\underline{x}_j-\overline{\underline{x}}_1)'+\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_{j2}}{k}(\underline{x}_j-\overline{\underline{x}}_2)(\underline{x}_j-\overline{\underline{x}}_2)'+\Lambda_{\circ}H\Lambda_{\circ}'+\frac{n_1n_2}{n_1k+n_2}(\overline{\underline{x}}_1-\overline{\underline{x}}_2)(\overline{\underline{x}}_1-\overline{\underline{x}}_2)'$$

$$N^*=H+H\Lambda_{\circ}'W^{*-1}\Lambda_{\circ}H-(H\Lambda_{\circ}'W^{*-1}X'Z^*-H\Lambda_{\circ}'W^{*-1}(1\otimes\underline{\hat{\mu}})Z^*)P^{*-1}\left(Z^*X'W^{*-1}\Lambda_{\circ}H-Z^*(1\otimes\underline{\hat{\mu}})'W^{*-1}\Lambda_{\circ}H\right)$$

$$P^*=Z^*I-Z^*X'W^{*-1}XZ^*+Z^*X'W^{*-1}(1\otimes\underline{\hat{\mu}})Z^*+Z^*(1\otimes\underline{\hat{\mu}})'W^{*-1}XZ^*$$
$$-Z^*(1\otimes\underline{\hat{\mu}})'W^{*-1}(1\otimes\underline{\hat{\mu}})Z^*$$

بعد تعويض دالة الترجيح المشتركة لـ (X,Z) المشروطة بـ$(Q=q)$ المُعرفة في المعادلة (15) مع التوزيع السابق لعدد العوامل $(Q=q)$ في المعادلة الخاصة بالتوزيع اللاحق لعدد العوامل (Q) الداخلة في التحليل التي سبق تعريفها في المعادلة العامة (2) نحصل على : (أحمد(2011))

$$p(Q=q|X)=K(X)\cdot\frac{\prod_{i=1}^{p}\sqrt{\frac{m+n+q-p-i}{2}}\cdot\sqrt{\frac{m+n+q-2p-2}{2}}}{\sqrt{\frac{m+n-p-2}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{p}\sqrt{\frac{m-p-i}{2}}\cdot(2\pi e)^{\frac{nq}{2}}}\cdot$$

$$\frac{|B|^{\frac{m-p-1}{2}}\cdot|H|^{\frac{p}{2}}\cdot|H+nI_q|^{-\frac{m+n-2p-2}{2}}}{|W^*|^{\frac{m+n-p-2}{2}}\cdot|N^*|^{\frac{m-p-2}{2}}\cdot|I_n-X'W^{*-1}X|^{\frac{q}{2}}}\cdot p(Q=q)$$

...(16)

إذ إن :

$$K(X)=\frac{(\pi)^{-\frac{n-0.5p+0.5}{2}}\cdot 2^{\frac{q-p-1}{2}}\cdot(\pi)^{\frac{p(p-1)}{4}}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{(2\pi)^{\frac{(q+n-1)p}{2}}\cdot\left(n_1+\frac{n_2}{k}\right)^{\frac{p}{2}}\cdot\sqrt{a+b}}$$

ثانياً : عندما يكون $\left(f_j\right)$ عاملاً عشوائياً

نفرض أن $\left(f_j\right)$ يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد المختلط بمتجه صفري ومصفوفة تباين $\left(I_q\right)$. دالة الترجيح المشتركة لـ $\left(X,F,Z\right)$ المشروطة بـ $\left(\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1\right)$ تُعطى بالشكل الآتي : (أحمد(2011))

$$p\left(X,F,Z\middle|\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1,Q=q\right)=\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n}\left[p_i\,\underline{f}_i\left(\underline{x}_j\middle|\underline{\mu},\Lambda,\psi,Q=q\right)\right]^{Z_{ji}}\cdot\left[\prod_{j=1}^{n}p\left(\underline{f}_j\right)\right]$$

$$=\frac{p_1^{n_1}\cdot\left(1-p_1\right)^{n-n_1}}{\left(2\pi\right)^{\frac{n(p+q)}{2}}}\cdot|\psi|^{\frac{n}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{n}{2}F'F\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{\tfrac{-1}{2}tr\psi^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)'+\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_{j2}}{k}\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)'\right]\right\}$$

...(17)

التوزيع الاحتمالي السابق المشترك للمعلمات $\left(\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1\right)$ المشروط بـ (Q) يكون بالشكل الآتي :

$$p\left(\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1\middle|Q=q\right)=p\left(\underline{\mu}\right)\cdot p\left(\Lambda\middle|\psi,Q\right)\cdot p\left(\psi\middle|Q\right)\cdot p\left(p_1\right)$$

...(18)

بعد التعويض عن التوزيعات الاحتمالية الاولية للمعلمات$\left(\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1\right)$ التي سبق تعريفها في المعادلات (10) و(11) و(12) على الترتيب مع دالة الترجيح لمصفوفة متجهات مشاهدات العينة (X) المشروطة بعدد العوامل (q) والمبينة في المعادلة أدناه :

$$p\left(X\middle|Q=q\right)=\int_{\sigma^2}\int_{F}\int_{\Lambda}\int_{\psi}\int_{\underline{\mu}}p\left(X,\underline{\mu},\Lambda,F,\Psi\middle|Q=q,\sigma^2\right)\cdot p\left(\sigma^2\right)d\,\underline{\mu}.d\psi.d\Lambda.dF.d\sigma^2$$

...(19)

نحصل على:

$$p\left(\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1\middle|Q=q,\sigma^2\right)=\frac{C_\circ(m,p)\cdot|B|^{\frac{m-p-1}{2}}\cdot|H|^{\frac{p}{2}}}{\left(2\pi\right)^{\frac{pq}{2}}\cdot\left(\sigma^2\right)^{\frac{(m+p)p}{2}}\cdot|\psi|^{\frac{m+q}{2}}}\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}tr\psi^{-1}\left[B+\left(\Lambda-\Lambda_\circ\right)H\left(\Lambda-\Lambda_\circ\right)'\right]\right\}$$

...(20)

وبدمج دالة الترجيح المختلطة المُشتركة لـ$\left(X,F,Z\right)$ المشروطة بـ $\left(p_1,\psi,\Lambda,\underline{\mu}\right)$ مع المعلومات المُسبقة عن المعلمات $\left(\underline{\mu},\Lambda,\psi\right)$ وإجراء بعض التبسيطات على المعادلة الناتجة ، نحصل على :

$$p\left(X,\underline{\mu},\Lambda,F,\psi,p_1,Z\middle|Q=q\right)=\frac{C_\circ(m,p)\cdot|B|^{\frac{m-p-1}{2}}\cdot|H|^{\frac{p}{2}}\cdot\Gamma(a+b)}{(2\pi)^{\frac{(p+q)n+pq}{2}}\cdot|\psi|^{\frac{m+n+q}{2}}\cdot\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}\cdot p_1^{\,a-1}(1-p_1)^{b-1}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{n}{2}F'F\right\}\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2}tr\,\psi^{-1}\left[R_F+\left(\underline{\mu}-\underline{\bar{x}}\right)\left(n_1+\frac{n_2}{k}\right)\left(\underline{\mu}-\underline{\bar{x}}\right)'+(\Lambda-\Lambda_F)K_F(\Lambda-\Lambda_F)'\right]\right\}$$

...(21)

أما دالة الترجيح المشتركة لــ (X,Z) المشروطة بــ $(Q=q)$ تُعطى بالشكل الآتي :

$$p\left(X,F,Z\middle|Q=q\right)=\int_{p_1}\int_{\Lambda}\int_{\psi}\int_{\underline{\mu}}p\left(X,F,Z\middle|\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1,Q\right)\cdot p\left(\underline{\mu},\Lambda,\psi,p_1\middle|Q=q\right)d\,\underline{\mu}.d\psi.d\Lambda.dp_1$$

...(22)

بعد تعويض المعادلتين (17) والتعويض عن مكونـات المـعادلة (14) في المعـادلة (22) أعلاه وإجراء التكامل نحصل على : (أحمد(2011))

$$p\left(X,F,Z\middle|Q=q\right)=\frac{C_\circ(m,p)\cdot2^{\frac{q-p-1}{2}}\cdot\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)\cdot\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-i}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m+n+q-2p-2}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{n(p+q)+(q-1)p}{2}}\cdot(\pi)^{\frac{p(n-0.5p+0.5)}{2}}\cdot\Gamma(a+b)\cdot\left(n_1+\frac{n_2}{k}\right)^{\frac{p}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-2}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{|B|^{\frac{m-p-1}{2}}\cdot|H|^{\frac{p}{2}}\cdot|H+FZF'|^{-\frac{p}{2}}}{|R_F|^{\frac{m+n-p-2}{2}}}$$

...(23)

التوزيع اللاحق لعدد العوامل $(Q=q)$ في هذه الحالة يُعطى بالشكل الآتي :

$$p\left(Q=q\middle|X,F,Z\right)=K(X)\cdot p\left(X,F,Z\middle|Q=q\right)\cdot p(Q=q) \qquad ...(24)$$

بعد تعويض المعادلة (23) مع التوزيع السابق لعدد العوامل في المعادلة الخاصة بالاحتمال اللاحق لعدد العوامل العامة الداخلة في التحليل التي سبق تعريفها في المعادلة أعلاه (24) نحصل على : (أحمد(2011))

$$p\left(Q=q\middle|X,F,Z\right)=K(X)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2p-2}{2}\right)\cdot\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+q-p-2}{2}\right)\cdot\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{m-p-i}{2}\right)\cdot(2\pi e)^{\frac{nq}{2}}}\cdot\frac{|H|^{\frac{p}{2}}\cdot|B|^{\frac{m-p-1}{2}}}{|H+FZF'|^{\frac{p}{2}}\cdot|R_F|^{\frac{m+n+p-2}{2}}}$$

...(25)

إذ إن :

$$K(X)=\frac{2^{\frac{q-p-1}{2}}\cdot\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\cdot\overline{)a}\cdot\overline{)b}}{(2\pi)^{\frac{n(p+q)+(q-1)p}{2}}\cdot(\pi)^{\frac{p(n-0.5p+0.5)}{2}}\cdot\left(n_1+\frac{n_2}{k}\right)^{\frac{p}{2}}\cdot\overline{)a+b}}$$

(4) مُقدر بيز لمعلمات نمـوذج التحليل العاملي الطبيعي المختلط

أولاً : عندما يكون $\left(\underline{f}_j\right)$ عاملاً ثابتاً

دالة الترجيح المختلطة الشرطية باستخدام البيانات الكاملـــة عند توافر المشاهدات $(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n)$ تُعطى بالشكل الآتي : (أحمد(2011))

$$L_C\left(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi\ ,F\mid X\ ,Z\right)\propto\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n}\left[p_i\,p\left(\underline{x}_j\middle|\underline{f}_j,\underline{\mu},\Lambda,\psi\right)\right]^{Z_{ji}}$$

$$\propto p_1^{\sum_{j=1}^{n_1}Z_{j1}}\cdot(1-p_1)^{\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}-\sum_{j=1}^{n}Z_{j1}}\cdot|\psi|^{-\frac{\sum_{j=1}^{n1}Z_{j1}+\sum_{j=1}^{n2}Z_{j2}}{2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2}tr\psi^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n_1}Z_{j1}\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)'+\sum_{j=1}^{n_2}\frac{Z_{j2}}{k}\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)\left(\underline{x}_j-\underline{\mu}-\Lambda\underline{f}_j\right)'\right]\right\}$$

...(26)

بدمج المعلومات الاولية حول المعلمات $(p_1,\underline{\mu},\Lambda,F,\psi)$ مع معلومات العينة الكاملة نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات $(p_1,\underline{\mu},\Lambda,F,\psi)$ وكالآتي :

$$p\left(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi,F\middle|X,Z\right)\propto L_C\left(p_1,\underline{\mu},\psi,F\middle|X,Z\right)\cdot p\left(\underline{\mu}\right)\cdot p\left(\Lambda|\psi\right)\cdot p(\psi)p(F)\cdot p(p_1)$$

...(27)

علماً أن $p(\underline{\mu})$ و $p(F)$ سبق تعريفهما في المعادلة (11) والتوزيع الاولي لــ (p_1) تم التعبير عنهُ وصفياً في المعـــادلة (9) أمـــا التوزيع الســـابق لـ $(\Lambda|\psi)$ و (ψ) عُـرفـا في معادلات سابقة لذلك فإن :

$$p\left(p_1,\underline{\mu},\Lambda,F,\psi\middle|X,Z\right)\propto p_1^{a_\circ+n_1-1}\cdot(1-p_1)^{b_\circ+(n-n_1)-1}\cdot|\psi|^{-\frac{m+n+q}{2}}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}tr\psi^{-1}(A_1+A_2+B)\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}n_1\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_1\right)'\psi^{-1}\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_1\right)+\frac{n_2}{k}\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_2\right)'\psi^{-1}\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_2\right)\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}tr\psi^{-1}\left[\Lambda FZ^*F'\Lambda'-XZ^*F'\Lambda'+\left(\underline{1}\otimes\underline{\mu}\right)Z^*F'\Lambda'-\Lambda FZ^*\left(\underline{1}\otimes\underline{\mu}\right)'+(\Lambda-\Lambda_\circ)H(\Lambda-\Lambda_\circ)'\right]\right\}$$

...(28)

نُشبه حدود الشكل التربيعي الآتي :

$$n_1\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_1\right)'\psi^{-1}\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_1\right)+\frac{n_2}{k}\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_2\right)'\psi^{-1}\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_2\right)$$

بالشكل التربيعي :

$$(\underline{x}-\underline{a})' A(\underline{x}-\underline{a})+(\underline{x}-\underline{b})' B(\underline{x}-\underline{b})=(\underline{x}-\underline{c})' (A+B)(\underline{x}-\underline{c})+(\underline{a}-\underline{b})' A(A+B)^{-1} B(\underline{a}-\underline{b}) \quad ...(29)$$

إذ إن $(\underline{x},\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ تُمثل متجهات ذات سعة $(p\times 1)$ ، كذلك (A,B) تُمثل مصفوفات ذات سعة $(p\times p)$ وتكون موجبة محددة .

نُعرّف الآن مُكونات المعادلة (29) وكالآتي :

$$\underline{x} = \underline{\mu}\ ;\ \underline{a} = \overline{\underline{x}}_1\ ;\ \underline{b} = \overline{\underline{x}}_2\ ;\ A = n_1\psi^{-1};\ B = \frac{n_2}{k}\psi^{-1}$$

$$\underline{c}=(A+B)^{-1}\cdot(A\underline{a}-B\underline{b})$$

فإن :

$$\underline{c}=\left(n_1\psi^{-1}+\frac{n_2}{k}\psi^{-1}\right)^{-1}\cdot\left(n_1\psi^{-1}\overline{\underline{x}}_1+\frac{n_2}{k}\psi^{-1}\overline{\underline{x}}_2\right)$$

$$\underline{\mu}^* = \frac{n_1\overline{x}_1+\frac{n_2}{k}\overline{x}_2}{n_1+\frac{n_2}{k}}$$

لذلك فإن المعادلة (28) تصبح بالشكل الآتي :

$$p(p_1,\underline{\mu},\Lambda,F,\psi|X,Z)\propto p_1^{a_\circ+n_1-1}\cdot(1-p)^{b_\circ+n_2-1}\cdot|\psi|^{-\frac{m+n+q}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)'\psi^{-1}(\underline{\mu}-\underline{\mu}^*)\right\}\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}tr\psi^{-1}\left[R^*{}_F+\frac{n_1n_2}{n_1+\frac{n_2}{k}}(\overline{\underline{x}}_1-\overline{\underline{x}}_2)(\overline{\underline{x}}_1-\overline{\underline{x}}_2)'+(\Lambda-\Lambda_F)K_F(\Lambda-\Lambda_F)'\right]\right\} \quad ...(30)$$

تُمثل المعادلة (30) نواة التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات $(p_1,\underline{\mu},\Lambda,F,\psi)$ ، الذي يُعبر عنهُ وصفياً بالشكل الآتي : (أحمد(2011)) .

$$p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi,F\,|\,X,Z\sim Beta\,(a_\circ+n_1,b_\circ+n_2)-N_p(\underline{\mu}^*,\psi)$$
$$-IW\left(\left(R^*{}_F+\frac{n_1n_2}{n_1+\frac{n_2}{k}}(\overline{\underline{x}}_1-\overline{\underline{x}}_2)(\overline{\underline{x}}_1-\overline{\underline{x}}_2)'+(\Lambda-\Lambda_F)K_F(\Lambda-\Lambda_F)'\right),m,q\right)$$

إذ إ ن :

$$R^*{}_F=A_1+A_2+B+\Lambda_\circ H\Lambda_\circ{}'+(XZ^*F'-(\underline{1}\otimes\underline{\mu})Z^*F'+\Lambda_\circ H)K_F^{-1}(XZ^*F'-(\underline{1}\otimes\underline{\mu})Z^*F'+\Lambda_\circ H)'$$

$$A_1 = \sum_{j=1}^{n} Z_{j1}\left(\underline{x}_j - \underline{\bar{x}}_1\right)\left(\underline{x}_j - \underline{\bar{x}}_1\right)' ;\; A_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_{j2}}{k}\left(\underline{x}_j - \underline{\bar{x}}_2\right)\left(\underline{x}_j - \underline{\bar{x}}_2\right)'$$

...(31)

بملاحظة الطرف الأيمن من المعادلة (30) نجد أن :

$$p\left(p_1, \underline{\mu}, \Lambda, F, \psi \middle| X, Z\right) \propto p\left(p_1 \middle| X, Z\right) \cdot p\left(\underline{\mu} \middle| X, Z, \psi\right) \cdot p\left(\Lambda, \psi \middle| X, Z\right)$$

...(32)

لذلك فإن التوزيع اللاحق لــ $(\underline{\mu})$ المشروط بــ (ψ) هو :

$$\underline{\mu}\Big| X, \psi, Z \sim N_p\left(\underline{\bar{x}}, \left(n_1 + \frac{n_2}{k}\right)^{-1} \cdot \psi\right)$$

أما مقدر بيز لمتجه المتوسط $(\underline{\mu})$ المشروط بــ (ψ) يكون كالآتي : (أحمد(2011))

$$\underline{\hat{\mu}}_B = \underline{\bar{x}} = \frac{n_1 \underline{\bar{x}}_1 + \frac{n_2}{k}\underline{\bar{x}}_2}{n_1 + \frac{n_2}{k}} \qquad ...(33)$$

والتوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لنسبة الخلط (p_1) يُوصف كالآتي :

$$p_1 \middle| X, Z \sim Beta\,(a, b)$$

إذ إن :

$$a = a_\circ + n_1 \quad ; \quad b = b_\circ + n_2$$

وأن مقدر بيز لنسبة الخلط (p_1) يُعرف كالآتي : (أحمد(2011))

$$\hat{p}_{1B} = \frac{a}{a+b} = \frac{a_\circ + n_1}{a_\circ + b_\circ + n} \qquad ...(34)$$

والتوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لــ (F) يُمكن إيجادهُ كالآتي :

$$p\left(F \middle| X, Z\right) \propto \int_\Lambda \int_\psi \int_{p_1} \int_{\underline{\mu}} p\left(p_1, \underline{\mu}, \Lambda, F, \psi\right) d\underline{\mu}.dp_1.d\psi.d\Lambda$$

وبعد التكامل نحصل على :

$$p\left(F \middle| X, Z\right) \propto \frac{\left|K^*_F\right|^{\frac{m+n+2p-2}{2}}}{\left|K^*_F - \left(XZ^*F' - \left(\underline{1} \otimes \underline{\mu}\right)Z^*F' + \Lambda_\circ H\right)' W^{**^{-1}}\left(XZ^*F' - \left(\underline{1} \otimes \underline{\mu}\right)Z^*F' + \Lambda_\circ H\right)\right|^{\frac{m-p-2}{2}}}$$

...(35)

إذ إن :

$$W^{**} = \sum_{j=1}^{n_1} Z_{j1}\left(\underline{x}_j - \overline{\underline{x}}_1\right)\left(\underline{x}_j - \overline{\underline{x}}_1\right)' + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{Z_{j2}}{k}\left(\underline{x}_j - \overline{\underline{x}}_2\right)\left(\underline{x}_j - \overline{\underline{x}}_2\right)' + B + \Lambda_{\circ} H \Lambda'_{\circ}$$

وباستخدام جبر المصفوفات على مقام المعادلة أعلاه نحصل على :

$$p\left(F|X,Z\right) \propto \left|M^{*} + \left(F - \hat{F}^{*}\right)P_{*}\left(F - \hat{F}^{*}\right)'\right|^{-\frac{m-p-2}{2}} \qquad \dots(36)$$

لذلك نستنتج بأن مصفوفة العوامل العامة (F) تتبع توزيع (Matrix t-Distribution) وبتوقع مساوي إلى $(\hat{F}^{*})$ ، وأن مقدر بيز لـ (F) هو : (أحمد(2011))

$$\hat{F}_B^{*} = \left[H\Lambda_{\circ}' W^{*-1} X Z^{*} - H\Lambda_{\circ}' W^{*-1}\left(\underline{1} \otimes \underline{\hat{\mu}}\right)Z^{*}\right]P_{*}^{-1} \qquad \dots(37)$$

إذ إن :

$$P_{*} = Z^{*} I - Z^{*} X W^{*-1} X' Z^{*} + Z^{*} X' W^{*-1}\left(\underline{1} \otimes \underline{\mu}\right)Z^{*} + Z^{*}\left(\underline{1} \otimes \underline{\mu}\right)' X Z^{*}$$
$$- Z^{*}\left(\underline{1} \otimes \underline{\mu}\right)' W^{*-1}\left(\underline{1} \otimes \underline{\mu}\right)Z^{*}$$

والتوزيع الاحتمالي اللاحق للمصفوفة (Λ) الشرطي على مصفوفة العوامل العامة (F) يُعطى كالآتي :

$$p\left(\Lambda|F,X,Z\right) = \frac{p\left(\Lambda,F|X,Z\right)}{p\left(F|X,Z\right)} \qquad \dots(38)$$

وبالتعويض مع دمج الحدود التي لا تحتوي على المعلمة (Λ) مع ثابت التناسب وبافتراض أن $(F = \hat{F})$ نحصل على :

$$p\left(\Lambda|\hat{F},X,Z\right) \propto \left|R_{\hat{F}} + \left(\Lambda - \Lambda^{*}_{\hat{F}}\right)G_{\hat{F}}\left(\Lambda - \Lambda^{*}_{\hat{F}}\right)'\right|^{-\frac{m+n+q-p-2}{2}}$$

...(39)

المعادلة (39) تمثل نواة توزيع (Matrix t-Distribution) بتوقع مُساوي إلى $(\Lambda_{\hat{F}})$ عليه فإن مقدر بيز الشرطي لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) المشروطة بمصفوفة العوامل العامة هو : (أحمد(2011))

$$\underset{(p\times q)}{\hat{\Lambda}_B^{*}} = \Lambda^{*}_{\hat{F}} = \Lambda_{\circ} + [X - \left(\underline{1} \otimes \underline{\hat{\mu}}\right) - \Lambda_{\circ}\hat{F}]Z^{*} \cdot F'\left(H + \hat{F}Z^{*}\hat{F}'\right)^{-1}$$

...(40)

يتكون مقدر بيز لمصفوفة تحميلات العوامل العامة والمعرف في المعادلة أعلاه من جزئين، الأول:- يعتمد على مصفوفة معلمة الموقع للتوزيع السابق لمصفوفة التحميلات مضافاً إليه حد أخر يُمثل حد الخطأ $\left(\hat{e}_{\circ} = \left[X - \left(\underline{1} \otimes \underline{\hat{\mu}}\right) - \Lambda_{\circ}\hat{F}\right]\right)$ ، رُشح الخطأ بمصفوفة مرشحات كالمن $\left(Z^{*} \cdot F'\left(H + \hat{F}Z^{*}\hat{F}'\right)\right)$.

ثـانـيـاً : عندما (f_j) يكون عاملاً عشوائياً :

إن دالة الترجيح باستخدام البيانات الكاملة تُعرف بالآتي :

$$L_C\left(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi\,\middle|X,F,Z\right)\propto\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n}\left[p_i\,p\left(\underline{x}_i\middle|\underline{f}_j,\underline{\mu},\Lambda,\psi\right)\cdot p\left(\underline{f}_j\right)\right]^{Z_{ji}}$$

بعد التعويض وإجراء بعض التبسيطات نحصل على دالة الترجيح المختلطة لـ $(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi)$ وكالآتي :

$$L_C\left(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi\middle|X,F,Z\right)\propto p_1^{n_1}\cdot(1-p_1)^{n-n_1}\cdot|\psi|^{-\frac{n}{2}}\cdot\exp\left\{\frac{-n}{2}F'F\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}tr\,\psi^{-1}\Big[A_1+A_2\right.$$
$$+n_1\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}_1}\right)\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}_1}\right)'+\frac{n_2}{k}\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_1\right)\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}_2\right)'+\Lambda FZ^*F'\Lambda'-XZ^*F'\Lambda'+\left(\underline{1}\otimes\underline{\mu}\right)Z^*F'\Lambda'$$
$$\left.-\Lambda FZ^*X'+\Lambda FZ^*\left(\underline{1}\otimes\underline{\mu}\right)'\Big]\right\}$$

...(41)

التوزيع الاحتمالي السابق المشترك للمعلمات $(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi)$ يُعطى كالآتي :

$$p(p_1,\mu,\Lambda,\psi)=p(p_1)\cdot p(\underline{\mu})\cdot p(\Lambda|\psi)\cdot p(\psi)\qquad ...(42)$$

وبدمج معلومات العينة الكاملة مع المعلومات السابقة عن المعلمات $(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi)$ نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق المشترك للمعلمات $(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi)$ وهو :

$$p\left(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi\middle|X,F,Z\right)\propto p_1^{a_\circ+n_1-1}\cdot(1-p_1)^{b_\circ+n_2-1}\cdot|\psi|^{-\frac{m+n+q}{2}}\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}tr\,\psi^{-1}\left[R_F^*+\left(n_1+\frac{n_2}{k}\right)\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}\right)\left(\underline{\mu}-\overline{\underline{x}}\right)'+\left(\Lambda-\Lambda_F^*\right)\left(FZ^*F'+H\right)\left(\Lambda-\Lambda_F^*\right)'\right]\right\}$$

...(43)

والتوزيع الاحتمالي اللاحق الهامشي لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) يُمكن إيجادهُ كالآتي : (أحمد(2011))

$$p\left(\Lambda\middle|X,F,Z\right)\propto\int_{\psi}\int_{\underline{\mu}}\int_{p_1}p\left(p_1,\underline{\mu},\Lambda,\psi\middle|X,F,Z\right)dp_1.d\underline{\mu}.d\psi$$

وبعد التكامل نحصل على :

$$p\left(\Lambda\middle|X.F,Z\right)\propto\left|R_F+\left(\Lambda-\Lambda_F^{**}\right)K_F^*\left(\Lambda-\Lambda_F^{**}\right)'\right|^{-\frac{m+n+q-1}{2}}\qquad ...(44)$$

إذ إن :

$$\underset{(p\times q)}{\hat{\Lambda}_B^{**}}=\Lambda_F^{**}=\left(XZ^*F'-\left(\underline{1}\otimes\underline{\hat{\mu}}\right)Z^*F'+\Lambda_\circ H\right)\left(FZ^*F'+H\right)^{-1}$$

والمعادلة (44) تُمثل نواة توزيع (Matrix t-Distribution) بتوقع $\left(\Lambda_F^{**}\right)$ ، وبعد أجراء بعض التبسيطات على $\left(\Lambda_F^{**}\right)$ نحصل على :

$$\underset{(p\times q)}{\hat{\Lambda}_B^{**}} = \Lambda_F^{**} = \Lambda_{\circ} + [X - (\underline{1}\otimes \underline{\hat{\mu}}) - \Lambda_{\circ} F]Z^{*}\cdot F'\left(H + FZ^{*}F'\right)^{-1} \quad ...(45)$$

أما التوزيع اللاحق الهامشي لــ (ψ) فنستطيع الحصول عليه كالآتي :

$$p\left(\psi \mid X, F, Z\right) \propto \int_{p_1}\int_{\underline{\mu}}\int_{\Lambda} p\left(p_1, \underline{\mu}, \Lambda, \psi \mid X, F, Z\right) dp_1 . d\underline{\mu} . d\Lambda$$

وبعد التكامُل للمعادلة أعلاه نسبةً إلى $(\underline{\mu})$ و (p_1) نحصل على :

$$p(\psi|X,F,Z) \propto |\psi|^{-\frac{m+n+q-1}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2} tr\psi^{-1}R_F^{*}\right\} \cdot \int_{\forall\Lambda} \exp\left\{\frac{-1}{2} tr\psi^{-1}\left(\Lambda - \Lambda_F^{*}\right)K_F^{*}\left(\Lambda - \Lambda_F^{*}\right)'\right\} d\Lambda \quad ...(46)$$

والتكامل أعلاه يُمثل نواة توزيع (Matrix Normal Distribution) ونتيجة هذا التكامل هي : (أحمد(2011))

$$|\psi|^{\frac{q}{2}} \cdot \left|K_F^{*}\right|^{\frac{p}{2}}$$

وعليه فإن التوزيع اللاحق لــ (ψ) يكون كالآتي :

$$p(\psi|X,F,Z) \propto |\psi|^{-\frac{m+n-1}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2} tr\psi^{-1}R_F^{*}\right\}$$

$$\hat{\psi}_B^{*} = \frac{R_F^{*}}{m + n - 2p - 3} \quad ...(47)$$

نُكامل دالة كثافة الاحتمال اللاحقة لــ $(p_1, \underline{\mu}, \Lambda, \psi)$ نسبةً إلى (p_1, Λ) لنحصل على التوزيع اللاحق المشترك لــ (ψ, μ) ويكون كالآتي :

$$p\left(\underline{\mu}, \psi \mid X, F, Z\right) \propto |\psi|^{-\frac{m+n}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} tr\,\psi^{-1}\left[\left(n_1 + \frac{n_2}{k}\right)\left(\underline{\mu} - \underline{\bar{x}}\right)\left(\underline{\mu} - \underline{\bar{x}}\right)' + R_F^{*}\right]\right\} \quad ...(48)$$

يتم الحصول على مقدر بيز غير الشرطي لمتجه المتوسط (μ) كالآتي :

$$E\left(\underline{\mu}|X, F, Z\right) \propto \int_{\psi}\int_{\underline{\mu}} \underline{\mu} \cdot p\left(\underline{\mu}, \psi \mid X, F, Z\right) d\underline{\mu}\, d\psi$$

$$\propto \int_{\psi} |\psi|^{-\frac{m+n}{2}} \cdot \int_{\underline{\mu}} \underline{\mu} \cdot \exp\left\{-\frac{tr\,\psi^{-1}}{2} R_F^{*}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{\mu} - \underline{\bar{x}}\right)'\psi^{-1}\left(\underline{\mu} - \underline{\bar{x}}\right)\right\} d\underline{\mu}$$

...(49)

التكامل الداخلي في المعادلة (49) أعلاه يُمثل التوقع الرياضي لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد والتكامل الخارجي يُمثل التكامل لنواة توزيع معكوس ويشرت بدرجة حُرية $(m+n-p)$ وعليه فإن : (أحمد(2011))

$$\underline{\hat{\mu}}_B \propto \overline{X} \cdot \left|R_F^*\right|^{-\frac{m+n-p}{2}}$$

لكن (R_F^*) سبق تعريفها في المعادلة (3-26) التي تحتوي على حدود تحتوي على (μ) ومن هذه الحدود : (أحمد(2011))

$$(\underline{1} \otimes \underline{\mu})Z^* F' = \begin{pmatrix} \underset{(p\times n_1)}{\mu^{(1)}} & \underset{(p\times n_2)}{\mu^{(2)}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{n_1} & \underset{n_1\times n_2}{0} \\ \underset{n_2\times n_1}{0} & \frac{I_{n_2}}{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underset{(q\times n_1)}{F_1'} \\ \underset{(q\times n_2)}{F_2'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 \sum_{j=1}^{n} f_{1j} & \mu_1 \sum_{j=1}^{n} f_{1j} & \cdots\cdots & \mu_1 \sum_{j=1}^{n} f_{1j} \\ \mu_2 \sum_{j=1}^{n} f_{2j} & \mu_2 \sum_{j=1}^{n} f_{2j} & \cdots\cdots & \mu_2 \sum_{j=1}^{n} f_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_p \sum_{j=1}^{n} f_{qj} & \mu_p \sum_{j=1}^{n} f_{qj} & \cdots\cdots & \mu_p \sum_{j=1}^{n} f_{qj} \end{pmatrix}$$

$$= n \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \overline{f}_1 & \mu_1 \overline{f}_2 & \cdots\cdots & \mu_1 \overline{f}_q \\ \mu_2 \overline{f}_1 & \mu_2 \overline{f}_2 & \cdots\cdots & \mu_2 \overline{f}_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_p \overline{f}_1 & \mu_p \overline{f}_2 & \cdots\cdots & \mu_p \overline{f}_q \end{pmatrix} = \underset{(p\times q)}{0}$$

هذا يعني أن (R_F) لا تعتمد على المتجه $(\underline{\mu})$ ، لذلك فإن : (أحمد(2011))

$$\underline{\hat{\mu}}_B^* = \underline{\overline{X}} = \frac{kn_1 \underline{\overline{x}}_1 + n_2 \underline{\overline{x}}_2}{kn_1 + n_2} \qquad \text{....(50)}$$

(5) الجانب التجريبي :

تم استخدام لغة (Matlab 7.9) في توليد البيانات لنموذج التحليل العاملي الطبيعي المُختلط فقد افترضنا بان المُتجه العشوائي $\underline{X}$ يحتوي على عشرة مُتغيرات وولدت عينتين بالحجم ($n=50$ و $n=100$) وافترضنا ثلاثة اشكال للمصفوفة ψ هي :

$$\psi = 0.5 I_{10} \qquad ; \qquad \psi = 0.9 I_{10}$$

$$\psi = \text{Diag}\ (0.9\ ,\ 0.9\ ,\ 0.9\ ,\ 0.9\ ,\ 0.9\ ,\ 0.75\ ,\ 0.75\ ,\ 0.75\ ,\ 0.75\ ,\ 0.75)$$

ونفترض بأن المصفوفة Λ تأخذ الاشكال الثلاثة الاتية :

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

الشكل الثاني (Λ_2) نُغير كل قيمة (0.5) في المصفوفة أعلاه بـ (0.7) والشكل الثالث (Λ_3) نُغير (0.5) بـ (0.9) .

ومُتجه المتوسط أُفترض بالشكل الاتي :

$$\mu' = [0.301 \quad 0.379 \quad 0.479 \quad 0.501 \quad 0.793 \quad 0.852 \quad 0.898 \quad 0.951 \quad 0.987 \quad 1.032]$$

وطالما أن نسبة التلويث في العينة لا يزيد عن 16% لذلك فقد تم توليد ((0.84(n)) مشاهدة نظيفة لحد الخطأ و((0.16(n)) مشاهدة ملوثة لحد الخطأ . وفيما يأتي الخطوات المتبعة للحصول على مشاهدات العينتين التجريبيتين وكالآتي :

1- توليد المشاهدات النظيفة لحد الخطأ بحجمي عينتين $(n_1 = 42\,,84)$ من $N_{10}(0,\psi)$ واستخدمنا الأشكال الثلاثة لـ (ψ) لنحصل على ست عينات نظيفة .

2- يتم وضع مشاهدات كل عينة نظيفة في عمود ويتم وضع إما 8 أو 16 صفر حسب حجم العينة الكلية (n) تحت مشاهدات العينة النظيفة لذلك يصبح حجم ثلاثة أعمدة هو $(n = 50)$ وثلاثة بحجم $(n = 100)$.

3- توليد المشاهدات الملوثة لحد الخطأ بحجمي عينتين $(n_2 = 8\,,16)$ من $N_{10}(\underline{0},k\psi)$ وقد افترضنا أن $(k = 2)$ واستخدمنا (ψ) التي سبق تعريفها في (1)، لنحصل على ست عينات ملوثة .

4- وضع مشاهدات كل عينة ملوثة في عمود إذ يتم وضع إما (42 صفر أو 84 صفر) أولاً ويتم وضع المشاهدات الملوثة المولدة في الخطوة (3) تحت الأصفار لنحصل على ثلاثة أعمدة تحتوي على 50 مشاهدة وثلاثة أعمدة تحتوي على 100 مشاهدة .

5- يتم ضرب كل عمود في الخطوة (2) بـ $(p_1 = 0.84)$ وبضرب كل عمود في الخطوة (4) بـ $(1 - p_1 = 0.16)$ ونجمع حاصل الضرب للأعمدة المضروبة بـ 0.84 بحاصل الضرب للأعمدة المضروبة بـ 0.16 لنحصل على عينات حد الخطأ .

6- نفرض أن عدد العوامل العامة الداخلة في أنموذج (MNFA) هو خمسة لذلك سوف نولد عينتين بالحجمين $(n = 50\,,100)$ من $N_5(\underline{0}, I_5)$.

7- يتم ضرب مشاهدات الخطوة (6) بكل شكل من الأشكال الثلاثة لمصفوفة التحميلات التي سبق تعريفها أعلاه .

8- نحسب $(\underline{1} \otimes \underline{\mu})$ إذ أن **1** متجه الواحدات ذات سعة $(1 \times n)$ و μ نفس المتجه المعرف في أعلاه .

9- نحصل على مشاهدات المتغيرات $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_p$ للعينات الست من حاصل جمع الخطوات (5 و 6 و 7) .

10- لتحديد معلمة الموقع للتوزيع السابق لمصفوفة التحميلات تم تجزئة عينة الدراسة إلى جزئين مُتساويين بالحجمين $(25\,, 50)$ إذ يكون عدد المشاهدات الملوثة في كل عينة هو $(4\,, 8)$ على الترتيب ، حُللت عينة الجزء الأول بإحدى طرائق التحليل العاملي وهي طريقة المركبات الرئيسة وبعد تدوير المحاور بطريقة الـ (Varimax) افترضنا بأن معلمة الموقع للتوزيع السابق لـ (Λ) هي مصفوفة التحميلات للعوامل المستخلصة من عملية التدوير .

الاحتمال اللاحق لعدد العوامل العامة ومقدرات بيز لأنموذج (MNFA)

يُستخدم الجزء الثاني من العينات الست في تقدير الاحتمال اللاحق لعدد العوامل العامة الداخلة في التحليل عندما يكون $(\underline{f}_j)$ عاملاً غير عشوائي ، والجدول (1) يوضح اللوغاريتم الطبيعي للأحتمال اللاحق لعدد العوامل العامة $(Q = 2,3,4,5)$ باستخدام المعادلة (16) .

الجدول (1):اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق لعدد العوامل (Q)
لأنموذج (MNFA) عندما يكون $(\underline{f}_j)$ عاملاً غير عشوائي وللعينات جميعها

مجموعة البيانات	عدد العوامل (Q)			
	2	3	4	5
1	-47.581	-36.295*	-38.698	-37.049

2	-38.021	-33.134	-20.779*	-29.262
3	-26.083	-19.414*	-24.660	-23.376
4	-41.143	-40.015	-33.091*	-39.804
5	-36.114	-33.309	-19.764*	-31.794
6	-16.021	-15.016	-9.025	-7.047*

***: تمثل أعلى قيمة للوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق (المرجح) لعدد العوامل (Q) .**

بعد تحديد عدد العوامل المناسب لأنموذج التحليل العاملي ، يُمكن الحصول على مقدرات بيز لمعلمات الأنموذج (ψ و$\underline{\mu}$ وp وF) باستخـدام المعـادلات (33) و(34) و(37) على الترتيب (أنظر إلى (أحمد،2011)) .

بالنسبة إلى تحديد عدد العوامل للأنموذج عندما يكون $\left(\underline{f}_j\right)$ متغيراً عشوائياً فيتم باستخدام المعادلة (25) وبمختلف الحالات أعلاه ، عند ذلك نحصل على اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق لعدد مختلف من العوامل العامة ، والنتائج موضحة في الجدول (2) :

الجدول (2): اللوغاريتم الطبيعي للاحتمال اللاحق لعدد العوامل (Q)

لأنموذج (MNFA) عندما يكون $\left(\underline{f}_j\right)$ متغيراً عشوائياً

مجموعة البيانات	عدد العوامل (Q)			
	2	3	4	5
1	-79.072	-76.285	-70.366*	-74.779
2	-74.176	-69.140*	-70.074	-73.616
3	-66.039	-41.276*	-56.164	-63.705
4	-70.218	-53.692	-38.122*	-40.186
5	-61.776	-58.134	-50.055	-21.307*
6	-58.143	-47.015	-53.094	-36.207*

أما مقدرات بيز لمعلمات الأنموذج المختار في هذه الحالة $(\Lambda$ وψ و$\underline{\mu})$ فإنهُ يتم باستخدام المعـادلات (42) و(44) و(47) على الترتيب (أنظر إلى (أحمد،2011)) .

من خلال ملاحظة مقدرات بيز للمصفوفة (Λ) المذكورة آنفاً يتبين أن قيم كميات شيوع المتغير قد ارتفعت بزيادة قيم تحميلات العوامل لمصفوفة التحميلات التي أُستخدمت في توليد مصفوفة البيانات وثبوت تأثير كل من n و ψ ، أي أن كميات شيوع المتغير تتناسبُ تناسُباً

طردياً مع قيم مصفوفة تحميلات العوامل العامة $(\Lambda_1$ و Λ_2 و $\Lambda_3)$. وتبينت كفاءة أنموذج (MNFA) عندما يكون (f_j) عامل غير عشوائي وذلك من خلال حساب قيمة (AIC) لأنموذج (MNFA) باستخدام المعادلة

AIC= -2Log (Maximized Liklihood) + 2 (Number of Parameters)

إذ نُلاحظ أن قيمة الـ (AIC) عندما $q = 4, p = 10, n = 50$ و $(\underline{f}_j)$ عامل غير عشوائي تساوي (960.0468) وعندما يكون $(\underline{f}_j)$ متغيراً عشوائياً وعند نفس القيم لـ (q, p, v, n) نجد أن قيمة الـ (AIC) قد ارتفعت إلى (998.5408) .

ويُمكن ملاحظة أن عدد العوامل العامة المعنوية المختارة لنماذج التحليل العاملي عندما يكون $(\underline{f}_j)$ عاملاً غير عشوائي ومتغيراً عشوائياً والموضحة في الجداول (أنظر إلى (أحمد،2011)) . قد أرتفع بزيادة حجم العينة من $(n = 50)$ إلى $(n = 100)$ ، أي أن قيمة (q) عدد العوامل العامة المعنوية تتناسبُ تناسُباً طردياً مع حجم العينة (n) .

الاستنتاجات

من خلال هذه الدراسة تم التوصل إلى مجموعة من الاستنتاجات يمكن إجمالها بالآتي :

1. إن التوزيع الاحتمالي اللاحق لمصفوفة العوامل (F) ومتجه المتوسط $(\underline{\mu})$ ونسبة الخلط (p) ينتمي إلى التوزيعات الاحتمالية الشائعة وهو توزيع (Matrix t-Distribution) و(Multivariate Normal Distribution) و (Beta Distribution) على الترتيب ، أما التوزيع الاحتمالي اللاحق لمصفوفة تحميلات العوامل (Λ) ومصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء (ψ) يكون من التوزيعات الاحتمالية غير الشائعة .

2. يتكون مقدر بيز لمصفوفة تحميلات العوامل في أنموذج MNFA عندما يكون $(\underline{f}_j)$ عاملاً غير عشوائي وعشوائي من جزئين ، الأول: يعتمد على مصفوفة معلمة الموقع للتوزيع الاولي لمصفوفة التحميلات مضافاً إليه حد أخر يُمكن وصفهُ خطأ تنبؤياً في حالة $(\underline{f}_j)$ عشوائي رُشح الخطأ بمصفوفة رُبحية الترشيح (Filter Gain) ويُسمى أيضاً بمصفوفة مرشحات كالمن (Kalman Filter) .

3. من خلال الجانب التجريبي ، تبين أن عدد العوامل العامة المعنوية المختارة لنماذج التحليل العاملي عندما يكون $(\underline{f}_j)$ عاملاً غير عشوائي وعاملاً عشوائياً يتأثر بحجم العينة إذ يزداد عدد العوامل العامة المعنوية بزيادة حجم العينة .

التوصيات

1. إيجاد مقدرات بيز لمعلمات أنموذج التحليل العـاملي باستخدام خوارزمية تعظيم التـوقع الشرطي (Expectation Conditioned Maximization) .
2. تطبيق النتائج النظرية على بيانات حقيقية وبالأخص فيما يتعلق بالتلوث البيئي .
3. استخدام توزيعات احتمالية اولية مختلطة في أيجاد مقدرات بيز لمعلمات نماذج التحليل العاملي .

المصادر

[1] أحمد ، أحمد سامي (2011): " **تحليل بيز لمعلمات نموذج التحليل العاملي بوجود القيم الشاذة مع المحاكاة** " . رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات ، قسم الإحصاء و المعلوماتية ، جامعة الموصل .

[2] سعيد ، هيفاء عبد الجوادى (2005) ، " **تقدير معلمات التوزيعات المختلطة وتطبيقها على بيانات حديثي الولادة في مُحافظة نينوى** " ، اطروحة دكتوراه ، غير منشورة ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات ، جامعة الموصل .

[3] Geweke , I . (1993) **, " Outlier prone and Outlier resistant distribution "** , JASA, 71 , 502-505 .

[4] Green ,R. F. (1976) .**"Outlier-Prone and Outlier –Resistant Distribution".** Journal of the American Statistical Association,71 ,502-505 .

[5] Lee, S.E. and Press, J. (1998) **"Robustness of Bayesian Factor Analysis Estimates"** Communications In Statistics – Theory and Methods , 27(8) **,** 1871-1893.

[6] Loehlin , Johnc (2004) **"Latent Variable Models"**^{4th} Lawrence Erlbaum Associates , Publishers .

[7] Mayekawa, S. (1985). **"Bayesian Factor analysis"**. ONR Tech Report No 85-3, School of Education, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.

[8] Press , S. J. and Shigemasu , K.(1999) **"A note on Choosing the Number of Factors" ,** Comm. Statistics- Theory and Methods ,28(7) **,** 1653-1670.