المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (25) 2013
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي السادس لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص[386-397]

خوارزمية جينية مقترحة لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية مع التطبيق

د.احمد محمود السبعاوي* ندى يوسف عبد العزيز**

المستخلص

يتلخص هذا البحث في إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية باستخدام خوارزمية التحويلات لدالة الهدف والقيود واستخدام إحدى طرائق التقنيات الذكائية ممثلة بالخوارزمية الجينية وتطبيقها على معمل الغزل والنسيج في الموصل لإيجاد اكبر عدد ممكن من الوحدات وتعظيم دالة الهدف التي تمثل نسبة الربح إلى الكلفة .

Suggested genetic algorithm for solving linear fractional programming with application

Abstract

In this paper we deal with the optimal solution for linear fractional programming problem . our idea is based on transforming the objective function and constraints with applying the genetic algorithm to find maximum number of units with maximum value of the objective function which represent a ratio between profit and cost, then we applied it in the Spinning and weaving factory.

1.المقدمة: Intoduction

البرمجة الكسرية (FP) هي حالة خاصة من البرمجة اللاخطية والتي تستخدم عادة لنمذجة مسائل الحياة الحقيقية مع دالة او اكثر من الاهداف .(Borza,Azmin&Saraj,2012) وتتعامل البرمجة الكسرية مع واحد او اكثر من الدوال النسبية الخاضعة لقيود، وتُمثَل البرمجة الكسرية بقيود خطية وبدالة هدف لا خطية . وتكون دالة الهدف نسبة بين دالتين قد تكون هاتين الدالتين خطيتين او غير خطيتين(O.odior,2012).

*استاذ مساعد / قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

**باحثة / قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2013/10/10 ـــــــــــــــــــ **تأريخ القبول** 2013/11/21

على مدى العقود الاربعة اصبحت البرمجة الكسرية واحدة من ادوات التخطيط حيث تم تطبيقها في مجالات شتى في الحياة العملية لقياس كفاءة النظام مثل تخطيط الشركات والبنوك وتخطيط الانتاج والتخطيط المالي و الرعاية الصحية وتخطيط المستشفى(Effati, Pakdaman,2012) .(M. Saad, Sh. Biltagy, & B. Farag, 2010)

ويتم صياغة نموذج البرمجة الكسرية كالاتي :

$$Maximize(Minimize)z = \frac{p(x)}{Q(x)}$$
$$subject\ \ to \qquad h(x) \le b$$
$$x \ge 0$$

حيث ان

P(x), Q(x) : عبارة عن دوال بدلالة المتغير x .وقد تكون هاتين الدالتين خطية او تربيعية او لا خطية.

h(x) : عبارة عن قيد يكون بشكل دالة خطية.

2.البرمجة الكسرية الخطية: Linear Fractional Programming (LFP)

تعد البرمجة الكسرية الخطية (LFP) صنف خاص من البرمجة الكسرية (FP) وتعتبر البرمجة الكسرية تعميم للبرمجة الكسرية الخطية(M. Borza, M. Saraj,2012 .اذ تطور حقل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بشكل كبير من قبل الهنكاري الرياضياتي B.Martos ومساعديه عام (DEEP, SINGH &GUPTA,2008)(wikipedia.org).

ويتم صياغة مسألة البرمجة الكسرية الخطية (LFP) بنسبة بين دالتين خطيتين كمسألة تعظيم (Maximize) او تقليل (Minimize) وبقيود خطية بالشكل التالي(wikipedia.org):

$$Maximize(Minimize)z = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta}$$
$$subject\ \ to \qquad Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

حيث ان :

x : متغيرات النموذج الرياضي.

c : معاملات المتغير x لدالة الهدف في البسط.

d : معاملات المتغير x لدالة الهدف في المقام.

α, β : ثوابت عددية.

A : معاملات المتغير x للطرف الايسر للقيود.

b : ثوابت الطرف الايمن للقيود.

ولحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية يجب ان يكون مقام دالة الهدف $(dx + \beta \ne 0)$.

3.خوارزمية الحل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (S.F. Tantawy, 2007)(Babul& Acharjee,2011)

يتم ايجاد الحل لمسائل البرمجة الكسرية الخطية (LFP) باستخدام طرائق مختلفة ومتعددة ومن ابرز هذه الطرائق هي طريقة التحويلات لدالة الهدف والقيود وكالاتي :

1.3تحويل دالة الهدف: Transformation of the objective function

الصيغة الرياضية لدالة الهدف لمسائل البرمجة الكسرية الخطية هي :

$$z = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta}$$

بضرب البسط والمقام ب β وكالاتي :

$$z = \frac{cx\beta + \alpha\beta}{\beta(dx + \beta)}$$

باضافة وطرح المقدار $(dx\alpha)$ في البسط وتبسيط المقدار :

$$z = \frac{cx\beta - dx\alpha + dx\alpha + \alpha\beta}{\beta(dx + \beta)}$$

$$z = \frac{(c\beta - d\alpha)x + \alpha(dx + \beta)}{\beta(dx + \beta)}$$

$$z = [c - d\frac{\alpha}{\beta}]\frac{x}{dx + \beta} + \frac{\alpha}{\beta}$$

$$z = py + g$$

حيث ان :

$$p = [c - d\frac{\alpha}{\beta}] \quad , \quad y = \frac{x}{dx + \beta} \quad , \quad g = \frac{\alpha}{\beta}$$

يمكن كتابة الصيغة النهائية لدالة الهدف وبدلالة المتغير y وكالاتي :

$$\therefore F(y) = py + g$$

2.3تحويل القيود : Transformation of the constraints

الصيغة الرياضية لقيود مسألة البرمجة الكسرية الخطية كالاتي :

$$Ax \le b$$
$$Ax - b \le 0$$

بقسمة الطرفين على $(dx + \beta)$ وكالاتي :

$$\frac{Ax-b}{(dx+\beta)} \le 0$$

بضرب المقدار ب $\frac{\beta}{\beta}$ نحصل على :

$$\frac{\beta(Ax-b)}{\beta(dx+\beta)} \le 0$$

وباضافة وطرح المقدار (bdx) في البسط :

$$\frac{Ax\beta + bdx - bdx - b\beta}{\beta(dx+\beta)} \le 0$$

$$\frac{\beta[A+\frac{b}{\beta}d]x}{\beta(dx+\beta)} - \frac{b(dx+\beta)}{\beta(dx+\beta)} \le 0$$

$$\therefore [A+\frac{b}{\beta}d]\frac{x}{(dx+\beta)} \le \frac{b}{\beta}$$

$$Gy \le h$$

حيث ان :

$$G = A+\frac{b}{\beta}d \quad , \quad y = \frac{x}{dx+\beta} \quad , \quad h = \frac{b}{\beta}$$

من المعادلات اعلاه نحصل على الصيغة الرياضية النهائية لمسألة البرمجة الكسرية بعد تحويلها الى مسألة برمجة خطية وبافتراض المتغير y كمتغير غير خطي بدلالة المتغير x .

$$Max(Min) \qquad F(y) = py + g$$

$$subject \quad to \qquad \begin{matrix} Gy \le h \\ y \ge 0 \end{matrix}$$

يتم حل نموذج البرمجة الخطية النهائي بطريقة مناسبة بدلالة المتغير y .

بالامكان حساب المتغيرات المجهولة x اعتمادا على المتغير y من الصيغة النهائية الخطية لمسألة البرمجة الكسرية :

$$y = \frac{x}{dx+\beta}$$

من الصيغة اعلاه نحصل على المتغير x :

$$x = \frac{\beta y}{1-dy}$$

حيث ان :

x : تمثل القيمة المثلى لمسألة البرمجة الكسرية . وبالتعويض عن قيمة x المثلى في دالة الهدف الاصلية لمسألة البرمجة الكسرية نحصل على القيمة المثلى لدالة الهدف .

4.**الخوارزمية الجينية**: (XIN-S ANG,2010)(wikipedia.org)

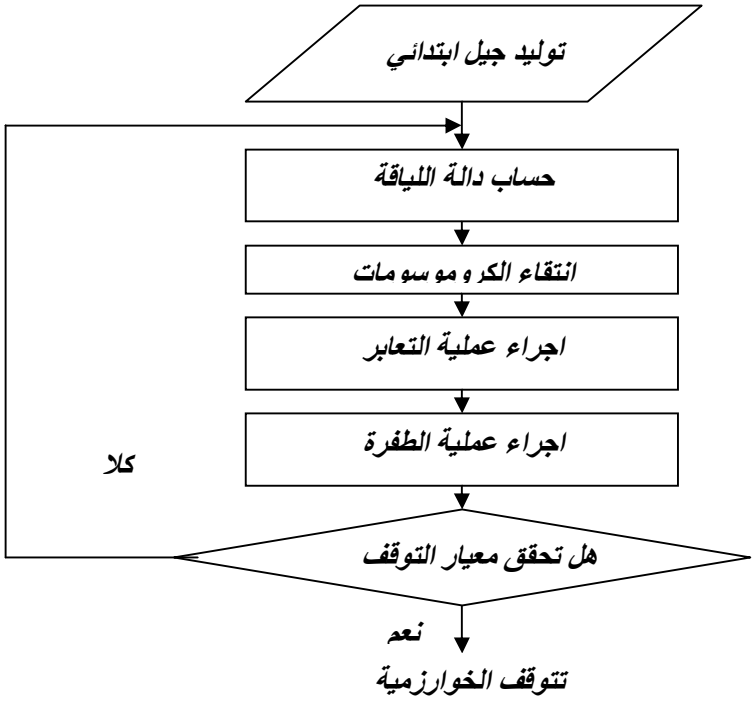
Genetic Algorithm(GA)

تعد الخوارزمية الجينية أحد أساليب الذكاء الاصطناعي وهي من الأساليب الحديثة، حيث برزت أهمية استخدام هذا الأسلوب في حل المسائل المعقدة ، استخدمت الخوارزمية الجينية لاول مرة من قبل John Hollan في العام 1975 ، اذ تم تطبيقها في مجالات متعددة مثل مسائل الأمثلية ومعالجة الصور وتطبيقات الشبكات العصبية.

المخطط العام للخوارزمية الجينية (Yang,Morris&Chung,2005):

General Diagram of the GA

تتضمن الخوارزمية الجينية عدة خطوات اساسية، وهذه الخطو ات تكون مترابطة بعضها مع البعض الآخر ، والشكل الاتي يوضح المخطط العام للخوارزمية الجينية:



5.**عناصر الخوارزمية الجينية**(Yang,Morris&Chung,2005)(wikipedia.org) :

1.المجتمع (Population): يتكون المجتمع من عدد من الافراد ويحدد عدد الافراد من قبل الباحث.وان لكل فرد كرموسوم يتكون من عدد من الجينات.

2.التقييم(Evaluation): تخصص قيمة الصلاحية (fitness value) لكل فرد سواء في المجتمع الابتدائي او في الاجيال اللاحقة وان هذه القيمة ترتبط بقيمة دالة الهدف.

3.التشفير(Encoding): هو عملية ايجاد تمثيل مناسب للحل ويعتمد التشفير على المسالة المراد حلها.

4.الانتقاء(Selection): هو عملية اختيار اباء من المجتمع لاجل التزاوج لانتاج جيل جديد. وهناك عدة طرق للانتقاء منها انتقاء عجلة الروليت وانتقاء الرتب وانتقاء المجموعاتو انتقاء الفرد ذو الرتبة الاعلى والانتقاء العشوائي.

5.التقاطع (Crossover): ويطلق عليها بعملية التزاوج وتأتي هذه العملية بعد عملية انتقاء الكروموسومات لتوليد الابناء. وهناك عدة طرق للتقاطع منها: التقاطع ذو نقطة القطع الواحدة والتقاطع المتعدد النقاط والتقاطع الرياضي والتقاطع الشجري والتقاطع بالاعتماد على الحدس والتقاطع المنتظم.

6.خطوات الخوارزمية الجينية المقترحة:

1.توليد جيل ابتدائي عشوائي يتكون من عدد من الكروموسومات باستخدام التشفير الحقيقي وكل كروموسوم يتكون من عدد من الجينات بحسب عدد المتغيرات.

2.تعويض الكرموسومات بدالة الهدف(والتي سوف تمثل دالة اللياقة) للجيل الابتدائي وترتيبها تنازلياً.

3.اختيار الاباء تبعاً لدالة الهدف الاكبر وفي هذه الخطوة تعتبر الاباء الجيل الجديد.

4.اجراء عملية التقاطع(التزاوج) بين الكروموسومات لانتاج انواع جديدة من الابناء وتم اختيار التقاطع الرياضي وصيغته كالاتي:

Offspring1=a*parent1+(1-a)*parent2

Offspring2=(1-a)*parent1+a*parent2

حيث ان a قيمة عشوائية محصورة بين 0,1.

5.اجراء عملية الطفرة للابناء باستخدام طفرة الاضافة والطرح حيث يتم اختيار قيمة صغيرة ويتم اضافتها لاحد الجينات وطرح نفس الكمية من الجين الاخر.

6.بعد اجراء الطفرة يتم تعويض الكروموسومات في القيود فاذا كانت تحقق قيود المسألة يتم حساب دالة الهدف لها واختيار اعظم قيمة لدالة الهدف.

7.تكرار الخوارزمية ولعدد من الاجيال لحين الحصول على اعظم قيمة لدالة الهدف.

الجانب التطبيقي:

في هذه الدراسة تم اخذ بيانات لمعمل الغزل والنسيج في مدينة الموصل لشهر اذار ولمدة خمسة ايام لسنة 2013 لانتاج انواع مختلفة لقماش من نوع همايون وهذه الانواع هي : شرشف نفرين+وسادة*2 / شرشف نفر + وسادة / شرشف طفل .

وتم بناء نموذج برمجة كسرية خطية بالاعتماد على البيانات المأخوذة من المعمل لبناء دالة الهدف والقيود للمسألة . وكانت البيانات كالاتي:

جدول(1):اسم المنتوج / شرشف نفرين+وسادة*2

المواد الاولية	وحدة القياس	الكمية/محلي	السعر		السعر الاجمالي	
			فلس	دينار	فلس	دينار
قماش همايون	م	3.05		1250	500	3,812
صافي كلفة المواد الاولية					500	3,812
المستلزمات						
خيوط عادية	م	74	0.3		200	22
علامة	عدد	1		46		46
لاستيك	م	0.36		104	440	37
تطريز	عدد	1		1000		1,000
تغليف	عدد	1		1000		1,000
مجموع المستلزمات					640	2,105
الرواتب والاجور والمصاريف		6		17		238
اجمالي الكلفة					140	6,156
الكلفة الكلية النهائية						6156
ربح الوحدة الواحدة						3000

جدول(2):اسم المنتوج / شرشف نفر+وسادة

المواد الاولية	وحدة القياس	الكمية/محلي	السعر		السعر الاجمالي	
			فلس	دينار	فلس	دينار
قماش همايون	م	2.1		1267	700	2,660
صافي كلفة المواد الاولية					700	2,660
المستلزمات						
خيوط عادية	م	46	0.3		800	13
علامة	عدد	2		42		84

تطريز	عدد	1		500		500
تغليف	عدد	1		750		750
مجموع المستلزمات					800	1,347
الرواتب والاجوروالمصاريف		16		63		1,008
اجمالي الكلفة					500	5,016
الكلفة الكلية النهائية						5017
ربح الوحدة الواحدة						1000

جدول(3):اسم المنتوج / شرشف طفل

المواد الاولية	وحدة القياس	الكمية/محلي	السعر		السعر الاجمالي	
			فلس	دينار	فلس	دينار
قماش همايون	م	0.95		1067	650	1,013
صافي كلفة المواد الاولية					650	1,013
المستلزمات						
خيوط عادية	م	21	0.3		300	6
علامة	عدد	1		46		46
تطريز	عدد	1		500		500
تغليف	عدد	1		15		15
مجموع المستلزمات					300	567
الرواتب والاجور والمصاريف		6		13		78
اجمالي الكلفة					950	1,658
الكلفة الكلية النهائية						1659
ربح الوحدة الواحدة						250

وهناك كلف اضافية= 200000 (تم اخذها من المعمل) يتم اضافتها الى دالة الكلفة وهي كلف (زيت المكائن – نقل –اعطال المكائن – تلف في المواد الاولية) .

تكوين دالة الهدف للمسألة :

الهدف الرئيسي لهذه الدراسة هو تعظيم نسبة الربح الى الكلفة وهذه النسبة تكون بشكل دالة كسرية حيث يمثل البسط دالة الربح ويمثل المقام دالة الكلفة . وان الارباح والكلف تم الحصول عليها من قسم الحسابات للمعمل .

الصيغة القياسية لدالة الهدف الكسرية الخطية:

$$Max \quad z = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta}$$

حيث ان:

x :متغيرات القرار للمنتجات الثلاثة (شرشف نفرين+وسادة*2/شرشف نفر+وسادة/شرشف طفل) والتي تمثل عدد الوحدات المنتجة لكل منتوج.

c :معاملات متغيرات القرار لدالة الربح(البسط).

d : معاملات متغيرات القرار لدالة الكلفة(المقام).

α : الربح الاضافي لدالة الربح(البسط).اذ لا يوجد ربح اضافي للمعمل وتم افتراض هذه القيمة=0 .

β :الكلف الاضافية لدالة الكلفة(المقام).

ويتم كتابة دالة الهدف بالشكل التالي:

$$Max \quad z = \frac{3000x_1 + 1000x_2 + 250x_3}{6156x_1 + 5017x_2 + 1659x_3 + 200000}$$

تكوين قيود المسألة:

تتكون قيود المسألة من قيدين هما :

1.قيد القماش: يمثل الطرف الايسر للقيد احتياجات المنتوجات الثلاثة من القماش بالمتر:

اسم المنتج		احتياجات المنتج من القماش بالمتر ولكل وحدة واحدة
شرشف نفرين+وسادة*2	(x1)	3.05
شرشف نفر+وسادة	(x2)	2.1
شرشف طفل	(x3)	0.95

ويمثل الطرف الايمن للقيد الكميات المتاحة من القماش .حيث ان كمية القماش المتوفرة لدى المعمل خلال اسبوع (لمدة خمسة ايام) هي 7500م .وعليه يمكن كتابة قيد القماش كالاتي:

$$3.05\,x_1 + 2.1x_2 + 0.95\,x_3 \le 7500$$

2.قيد الوقت: يمثل الطرف الايسر للقيد احتياجات الوقت للمنتوجات الثلاثة بالدقائق وكالاتي:

اسم المنتج		احتياجات المنتج من الوقت بالدقائق ولكل وحدة واحدة
شرشف نفرين+وسادة*2	(x1)	25
شرشف نفر+وسادة	(x2)	18
شرشف طفل	(x3)	10

حيث تم احتساب هذه الاوقات وفق مراحل وكالاتي:

المراحل / اسم المنتج	قص مع التحضيرات	خياطة	تطريز	تغليف	مجموع الاوقات
شرشف نفرين+وسادة*2	2.5	20	1.5	1	25
شرشف نفر+وسادة	2.5	13	1.5	1	18
شرشف طفل	1.5	6	1.5	1	10

ويمثل الطرف الايمن للقيد الوقت المتاح للعاملين خلال اسبوع (لمدة خمسة ايام) ويتم احتساب الوقت كالاتي:

عدد العاملين*عدد ايام العمل*الوقت المتاح للعمل خلال اليوم الواحد بالدقائق=30*5*390=58500

وعليه يمكن كتابة قيد الوقت كالاتي:

$$25\,x_1 + 18\,x_2 + 10\,x_3 \le 58500$$

حيث ان المعمل ينتج ما لايقل عن 500 وحدة لكل منتوج.

وعليه يمكن كتابة نموذج البرمجة الكسرية كالاتي:

$$Max \quad z = \frac{3000x_1 + 1000x_2 + 250x_3}{6156x_1 + 5017x_2 + 1659x_3 + 200000}$$

$$s.t \quad 3.05x_1 + 2.1x_2 + 0.95x_3 \le 7500$$

$$25x_1 + 18x_2 + 10x_3 \le 58500$$

$$x_1 \ge 500 \quad and \quad \text{int}\,eger$$

$$x_2 \ge 500 \quad and \quad \text{int}\,eger$$

$$x_3 \ge 500 \quad and \quad \text{int}\,eger$$

وباستخدام نظام Matlab 2010 تم الحصول على النتائج التالية باستخدام طريقة التحويلات والتي تحقق قيود المسألة:

$$x_1 = 1780 \quad , x_2 = 500 \quad , x_3 = 500$$

حيث ان اعظم قيمة لدالة الربح(البسط): $z_1 = 5{,}964{,}999$ و ان قيمة دالة الكلفة(المقام): $z_2 = 14{,}495{,}679$ وان نسبة الربح الى الكلفة $z = 0.41$ وهي نسبة كفوءة .

وبعد استخدام الخوارزمية الجينية المقترحة وبعد 500 جيل وبرمجتها بنظام الماتلاب تم الحصول على النتائج التالية:

$$x_1 = 1780 \quad , x_2 = 500 \quad , x_3 = 500 \quad , z = 0.41$$

الاستنتاجات:

تم التوصل الى الاستنتاجات التالية :

1.ان البرمجة الكسرية الخطية كونها تتعامل مع دالتي الربح والكلفة فانها تكون مفضلة دائماً وخاصة في المجالات الاقتصادية والادارية.

2.تم ايجاد افضل ربح واقل كلفة وكذلك تعظيم النسبة بين الربح والكلفة و علماً ان اعظم نسبة كانت 0.41 .

3.ان النتائج التي اظهرتها الخوارزمية الجينية كانت مطابقة مع النتائج التي تم الحصول عليها بطريقة تحويلات دالة الهدف والقيود.

4.عند استخدام الخوارزمية الجينية مع البرمجة الكسرية الخطية قد تعطي نتائج مطابقة او قد تحسن الحل.

المصادر:

1. Babul Hasan, Mohammad & Acharjee,(2011),"**Solving LFP by Converting it into a Single LP"**,International Journal of Operations Research Vol.8, No. 3, 1-14.
2. Borza, Mojtaba& Rambely, Azmin Sham & Saraj, Mansour,(2012),**" Solving Linear Fractional Programming Problems with Interval Coefficients in the Objective Function. A New Approach"**, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, no. 69, 3443 – 3452.
3. DEEP JOSHI, VISHWAS & SINGH, EKTA & GUPTA, NILAMA,(2008**),"** **Primal-Dual Approach to Solve Linear Fractional Programming Problem"**, Journal of the Applied Mathematics, Statistics and Informatics (JAMSI), 4, No. 1.
4. Effati, Sohrab& Pakdaman, Morteza,(2012),**" Solving the Interval-Valued Linear Fractional Programming Problem "**, American Journal of Computational Mathematics, 2, 51-55.
5. M. Borza, A. S. RAMBELY & M. Saraj ,(2012**),"A Stackelberg Solution to a Two-Level Linear Fractional Programming Problem with Interval Coefficients in the Objective Functions"**, Sains Malaysiana ,41(12), 1651–1656.
6. M. Saad, Omar& Sh. Biltagy, Mohamed& B. Farag, Tamer, (2010),**" On the Solution of Fuzzy Multiobjective Integer Linear Fractional Programming Problem"**, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5, no. 41, 2003 – 2018.
7. O.odior,Andrew, (2012),**" An Approach for Solving Linear Fractional Programming Problems"**, International Journal of Engineering and Technology, 1 (4) ,298-304.
8. S.F. Tantawy,(2007)," **A New Method for Solving Linear Fractional Programming Problems",** Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 1(2): 105-108, ISSN 1991-8178.

9. XIN-S ANG ,(2010),"**ENGINEERING OPTIMIZATION: An Introduction with Metaheuristic Applications** ",ISBN 978-0-470-58246-6.
10. Yang, Cao, Chung, & Morris,(2005)," **Applied Numerical Methods Using MATLAB**", ISBN 0-471-69833-4.

مصادر الانترنت:

11. www.wikipedia.org .